## Sommaire : ALGEBRE

# CONSEILS POUR LE BREVET

## 1. Se préparer avant l'épreuve

**Vérifiez** que vous avez **tout votre matériel** :

- **De quoi écrire** (pensez aux **recharges pour vos stylos plume** et **aux crayons de papier bien taillés**).
- **De quoi bien présenter** (**stylos de couleurs différentes**).
- **De quoi bien dessiner** (**matériel de géométrie en bon état**).
- **De quoi bien calculer** (le jour du brevet, empruntez donc **une 2ème calculatrice** car en cas de panne, personne ne pourra vous en prêter une).

## 2. Savoir présenter votre copie

- **N'oubliez pas** que **l'orthographe** et **la présentation** de la copie sont notées.
- Prévoyez **une copie double pour chaque partie** (cela vous permettra de commencer par la partie que vous préférez et de passer facilement d'une partie à l'autre).
- **Ecrivez bien sur les lignes**.
- **Sautez une ligne entre chaque question** et **écrivez clairement le numéro de la question**.
- **Encadrez vos résultats** ou **soulignez vos réponses**.

## 3. Savoir rédiger votre copie

- **Traitez les questions dans l'ordre** (si vous ne savez pas faire une question, laissez de la place et revenez-y plus tard ; pensez que vous pouvez souvent faire la suivante).
- **Faites vos figures sur une feuille à part** en indiquant le numéro de l'exercice (cela vous permettra d'avoir toujours la figure sous les yeux).
- En géométrie, **vérifiez si les hypothèses que vous utilisez sont bien dans l'énoncé ou déjà démontrées** et **ne mélangez pas le langage mathématique** et **le français** dans une même phrase.

## 4. Savoir relire votre copie

**Relisez plusieurs fois** en **vérifiant** :

- **la 1ère fois** : **si les résultats sont possibles** (par exemple, dans le cas du calcul de l'hypoténuse, le résultat doit être plus grand que les deux autres côtés) ;
- **la 2ème fois** : **si la réponse donnée correspond à la question posée** (si le texte précise par exemple valeur exacte, vous ne devez pas donner de valeur approchée) ;
- **la 3ème fois** : **les unités** et **les notations de géométrie** ;
- **la 4ème fois** : **l'orthographe**.

# Comment donner un résultat ?

## 1. Valeur exacte

Si la question est "**Calculer**", il faut donner une **valeur exacte**.

### Fraction

- Laisser le résultat sous forme de **fraction simplifiée** si la division ne se termine pas :

- si on trouve $\frac{15}{7}$, le résultat sera $\boxed{\frac{15}{7}}$.

- **Effectuer la division** si le résultat est demandé sous forme **décimale** (cela veut dire que la division se termine), par exemple :

- si on trouve $\frac{15}{2}$, le résultat sera $\boxed{7{,}5}$.
- si on trouve $\frac{12}{3}$, le résultat sera $\boxed{4}$.

### Racine carrée

- Laisser le résultat sous forme de **racine carrée** sauf dans **ce type de situations** :

- si on trouve $\sqrt{25}$, le résultat est $\boxed{5}$.
- si on trouve $\sqrt{0{,}81}$, le résultat est $\boxed{0{,}9}$.
- si on trouve $\sqrt{\frac{4}{9}}$, le résultat est $\boxed{\frac{2}{3}}$.

- Si on trouve $\sqrt{3}$, le résultat est $\boxed{\sqrt{3}}$.

### Calcul avec π

- Laisser $\pi$ sans le remplacer par 3,14. Pour le **périmètre d'un cercle** de rayon 3 cm, la réponse sera $\boxed{6\pi \text{ cm}}$.
- On calcule avec $\pi$ comme avec $x$.

Exemple : $5 + 2\pi + 4\pi = \boxed{5 + 6\pi}$

## 2. Arrondi

Si la question est "**Calculer à ... près**", il faut donner un **résultat arrondi**. Cela veut dire que **le calcul ne se termine pas**. On utilise **le symbole ≈**.

- Si on veut l'arrondi avec un certain nombre de chiffres après la virgule, **il faut prévoir un chiffre de plus après la virgule** lorsque l'on effectue le calcul.

- **Arrondir à $\frac{1}{10}$ près :** le résultat final doit avoir **1 chiffre après la virgule**, le chiffre des **dixièmes**.

- Arrondi à $\frac{1}{10}$ près : $\frac{20}{3} = 6{,}6|666...$

Le chiffre suivant est **supérieur ou égal à 5** donc on prend la valeur approchée **« au-dessus »** : $\boxed{6{,}7}$.

- Arrondi à $\frac{1}{10}$ près : $\frac{10}{3} = 3{,}3|333...$

Le chiffre suivant est **inférieur à 5**, donc on prend la valeur approchée **« en dessous »** : $\boxed{3{,}3}$.

## 3. Résultat possible ou impossible ?

☞ **Dans tous les cas**, il faut penser **à vérifier** si **le résultat** est **possible**.

Exemples : - Si vous trouvez **300 km.h$^{-1}$** pour **la vitesse d'un camion**, dites-vous que **c'est impossible ! ! !**

- Si vous trouvez que **la longueur d'un côté de l'angle droit** d'un triangle rectangle **est plus petite que l'hypoténuse**, dites-vous que **c'est possible**.

# Comment utiliser sa calculatrice ?

## 1. Trouver le type de la calculatrice : type 1, 2 ou 3

| | | |
|---|---|---|
|  **Type 1**<br>**FX 92 2D etc** |  **Type 2**<br>**On tape** $\sqrt{\phantom{x}}$ **25** EXE |  **Type 3**<br>**On tape 25** $\sqrt{\phantom{x}}$ |

## 2. Calculatrices de type 1 : choisir le mode

Pour choisir le mode **Math** ou **Line IO** : **shift** suivi de **setup** puis **1** ou **2**.
**Math** permet de faire des calculs écrits comme sur une **copie de math**.
**Line IO** permet d'écrire les calculs en **ligne** comme sur les calculatrices de **type 2**.
☞ En cas de problème, mode puis 1 et ensuite choisir Math ou Line IO.

## 3. Utiliser la calculatrice

Pour chaque calcul : - sur la première ligne, ce qui doit s'afficher sur l'écran.
- sur la 2ème ligne, ce qui doit être tapé.

| | **Type 1** | **Type 2** | **Type 3** |
|---|---|---|---|
| **Racines** | $3\sqrt{50}+7\sqrt{8}-5 = -5+29\sqrt{2}$<br>$3\sqrt{\phantom{x}}$ 50→+ $7\sqrt{\phantom{x}}$ 8→-5 $\boxed{\text{EXE}}$<br>*Les **flèches** indiquent qu'il faut appuyer sur la **grosse touche ronde** pour déplacer le **curseur** du côté indiqué par la flèche.* | On ne peut pas faire de calculs comme ci-contre. On peut seulement calculer des racines carrées et obtenir une valeur exacte ou arrondie.<br>$\sqrt{25} = 5$<br>$\sqrt{\phantom{x}}$ **25** $\boxed{\text{EXE}}$ | 5<br>**25** $\sqrt{\phantom{x}}$ **=** |
| **Fractions** | $\frac{2}{3} + \frac{1}{7} = \frac{17}{21}$<br>$\frac{\square}{\square}$**2↓3→ +** $\frac{\square}{\square}$**1↓7** $\boxed{\text{EXE}}$ | Il faut trouver la touche **fraction** : $\boxed{\text{a+b/c}}$ $\boxed{/}$ $\boxed{\text{d/c}}$<br>Nous la noterons $\boxed{\text{d/c}}$. Certaines calculatrices ne permettent pas les calculs de fractions.<br>**2⅃ 3 + 1⅃7 = 17⅃21**<br>**2** $\boxed{\text{d/c}}$ **3 + 1** $\boxed{\text{d/c}}$ **7** $\boxed{\text{EXE}}$ | |
| **Cosinus** | Pour choisir les degrés :<br>**shift** suivi de **setup** et **3**<br>$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$<br>**cos 30** $\boxed{\text{EXE}}$ | Pour choisir les degrés :<br>**mode** 2 fois puis **1**<br>cos 30 = 0,866025…<br>**cos 30** $\boxed{\text{EXE}}$ | 0,866025…<br>**30 cos =** |
| **Angle** | $\cos^{-1}(0,5 = 60$<br>**shift cos 0,5** $\boxed{\text{EXE}}$ | Il faut repérer la touche **Shift** ou **2nd** ou **seconde**… Nous l'appellerons **Shift**.<br>$\cos^{-1} 0,5 = 60$<br>**shift cos 0,5** $\boxed{\text{EXE}}$ | 60<br>**0,5 shift cos** |
| **Reste** | 25 ÷R3 8,R=1<br>**Quotient** **Reste**<br>**25 ÷R 3** $\boxed{\text{EXE}}$ | 25 ÷R3 8 1<br>**Quotient** **Reste**<br>**25 ÷R 3** $\boxed{\text{EXE}}$ | 8 1<br>**Quotient** **Reste**<br>**25 ⊦ 3 =** |

# Comment déterminer le PGCD de deux nombres ?

## 1. Par soustractions successives (algorithme des différences)

Si **a** et **b** sont deux nombres entiers naturels tels que **a > b**
alors **PGCD** (**a** ; **b**) = **PGCD** (**b** ; **a – b**)

**le plus petit** **la différence**

Exemple : Recherche du **PGCD** de **210** et **126**
**On soustrait** les deux nombres donnés : **210** - **126** = **84** ;
**On garde les deux plus petits 126** et **84** et **on recommence** ;
**On s'arrête** lorsque **la différence est nulle**.
Le **PGCD** de **210** et **126** est **la dernière différence non nulle**.

| Plus grand nombre : a | Plus petit nombre : b | Différence : a - b |
|---|---|---|
| 210 | 126 | 84 |
| 126 | 84 | 42 |
| 84 | 42 | **42** |
| 42 | 42 | **0** |

Donc **PGCD** (**210** ; **126**) = $\boxed{42}$

## 2. Par divisions successives (algorithme d'Euclide)

Si **a** et **b** sont deux nombres entiers naturels tels que **a > b**
alors **PGCD** (**a** ; **b**) = **PGCD** (**b** ; **r**)

| **a** | **b** |
|---|---|
| **r** | **q** |

**le plus petit** **reste de la division euclidienne de a par b**

Exemple : Recherche du **PGCD** de **1 078** et **322**
**On divise le plus grand nombre 1 078** par **le plus petit 322**.
**On garde le diviseur 322** et **le reste 112** de la division et **on recommence. On s'arrête** lorsque **le reste est nul**.
Le **PGCD** de **1 078** et **322** est **le dernier reste non nul**.

| Plus grand nombre : a | Plus petit nombre : b | Reste de la division euclidienne de a par b |
|---|---|---|
| 1 078 | 322 | 112 |
| 322 | 112 | 98 |
| 112 | 98 | **14** |
| 98 | 14 | **0** |

Donc **PGCD** (**1 078** ; **322**) = $\boxed{14}$

☞ **Pour trouver le reste de la division euclidienne**,
penser à utiliser **la touche** $\boxed{\div R}$ ou $\boxed{\vdash}$.

# Comment simplifier une fraction ?

## 1. Avec les tables de multiplication

Pour simplifier une fraction, on cherche **une table de multiplication** dans laquelle il y a à la fois **le numérateur** et **le dénominateur** de la fraction.

$\frac{12}{15} = \boxed{\frac{4}{5}}$

**12** et **15** sont dans **la table de 3**, donc **on simplifie par 3** cette fraction.

$\frac{63}{49} = \boxed{\frac{9}{7}}$

**63** et **49** sont dans **la table de 7**, donc **on simplifie par 7** cette fraction.

## 2. Avec les critères de divisibilité

Pour simplifier une fraction, on peut utiliser **les critères de divisibilité par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9** :

$\frac{14}{26} = \boxed{\frac{7}{13}}$

**On divise 14 et 26 par 2** car **ils sont pairs**. (dernier chiffre : **0** ; **2** ; **4** ; **6** ou **8**)

$\frac{40}{55} = \boxed{\frac{8}{11}}$

**On divise 40 et 55 par 5** car **leur dernier chiffre** est **0** ou **5**.

$\frac{39}{12} = \boxed{\frac{13}{4}}$

**On divise 39 et 12 par 3** car **la somme des chiffres** est **un multiple de 3** :
**3 + 9** = **12** et **1 + 2** = **3**

$\frac{99}{45} = \boxed{\frac{11}{5}}$

**On divise 99 et 45 par 9** car **la somme des chiffres** est **un multiple de 9** :
**9 + 9** = **18** et **4 + 5** = **9**

## 3. Avec le PGCD

Pour rendre irréductible $\frac{648}{972}$, on cherche **le PGCD** de **648** et **972** :

| Plus grand nombre : a | Plus petit nombre : b | Différence : a - b |
|---|---|---|
| 972 | 648 | 324 |
| 648 | 324 | **324** |
| 324 | 324 | 0 |

Donc **PGCD(648 ; 972 ) =** $\boxed{324}$

donc $\frac{648}{972} = \frac{\cancel{324} \times 2}{\cancel{324} \times 3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

# Comment savoir si deux entiers sont premiers entre eux ?

### Entiers non premiers entre eux

Deux entiers **ne sont pas premiers entre eux** s'ils ont **un diviseur commun autre que 1**.

**84** et **56** ont **2 comme diviseur commun** donc ils **ne sont pas premiers entre eux**.

### Entiers premiers entre eux

Deux entiers **sont premiers entre eux** si leur **PGCD est 1**.

**PGCD(15 ; 28) =** $\boxed{1}$

donc **15** et **28** **sont premiers entre eux**.

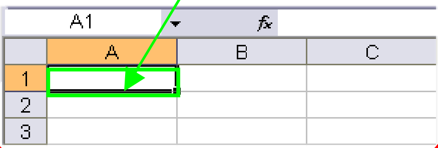
# Comment utiliser un tableur ?

## 1. Présentation

**Un tableur** (Excel, Open office etc…) est **un logiciel** qui, lorsqu'on change **les nombres**, permet de **calculer automatiquement** des résultats à partir de **formules de calcul**.

**Un tableur** contient **des cellules** nommées par **une lettre** et **un nombre**.

**cellule A1**




## 2. Fonctionnement

**Les cellules** d'**un tableur** peuvent contenir :

- **du texte** ;
- **des nombres** ;
- **des formules de calcul**.

Pour écrire **les formules de calcul** :

- on peut utiliser **des fonctions automatiques** ;
- saisir **une formule à la main** en commençant **toujours par le signe =** .

## 3. Exemple : recherche d'un PGCD par l'algorithme des différences

☞ **Recherche à la main** du **PGCD** de **36** et **24** :

| Plus grand nombre : a | Plus petit nombre : b | Différence : a - b |
|---|---|---|
| 36 | 24 | 12 |
| 24 | 12 | **$\boxed{12}$** |
| 12 | 12 | **0** |

☞ **Recherche avec un tableur** du **PGCD** de **36** et **24** :

- **A1**, **B1** et **C1** contiennent **du texte** ( Plus grand nombre : a etc…) ;
- **A2** et **B2** contiennent **des nombres** (**36** et **24**) ;
- **C2** contient **une formule de calcul « à la main »** :

  on veut calculer automatiquement **la différence** de **A2** et **B2** : **$\boxed{\text{=A2 - B2}}$** ;
- **A3** et **B3** utilisent **des fonctions automatiques MAX** et **MIN** pour trouver **le plus grand** et **le plus petit** des nombres **B2** et **C2** ;
- **C3** contient **une formule de calcul « à la main »** : **$\boxed{\text{=A3 - B3}}$**.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **1** | Plus grand nombre : a | Plus petit nombre : b | Différence : a - b |
| **2** | **36** | **24** | **= A2 - B2** |
| **3** | **= MAX (B2 ; C2)** | **= MIN(B2 ; C2)** | **= A3 - B3** |
| **4** | | | |

**On recopie les formules** dans **les lignes suivantes**.

# Comment résoudre un problème ouvert ?

**Problème ouvert :** c'est **un problème de la vie courante**, **de nature géométrique**, etc… pour lequel **il n'y a pas qu'une seule méthode de résolution**.
Le but de votre travail est **de chercher ce problème** en essayant bien sûr de trouver la solution, mais ce n'est pas cela le plus important.
☞ **L'important c'est de chercher** !

## 1. Comment chercher ?

- **Lisez attentivement l'énoncé** pour comprendre ce qui est demandé (sans vous laisser dérouter par la nature du problème)
- **Faites preuve d'initiative** en essayant d'explorer différentes pistes (dessins, schémas, figures, calculs, etc… ) même si cela n'aboutit pas forcément ;
- **Ecrivez toutes vos idées et toutes les méthodes** que vous utilisez, en cherchant à les expliquer au mieux avec le plus de détails possibles.

## 2. Comment rédiger ?

Dans **ce type de problème**, vous ne serez pas évalués tout à fait comme d'habitude.
Le plus important n'est pas seulement d'avoir trouvé une réponse juste.

- **Ne rendez jamais copie blanche** même si vous pensez ne pas avoir trouvé une solution correcte.
- **Essayez d'écrire une bonne description de votre recherche**, avec soin, précision et logique (vous serez de toute façon valorisés).

## 3. Un exemple d'énoncé

Au retour des vacances, Claire veut afficher ses photos dans sa chambre. Elle a **18 photos de paysages** et **12 photos de portraits**.

Elle veut les placer sur **des panneaux contenant chacun le même nombre de paysages** et **le même nombre de portraits**.

Combien peut-elle réaliser **au maximum de panneaux** en utilisant toutes les photos ?

Combien chaque panneau contient-il **de paysages** et **de portraits** ?

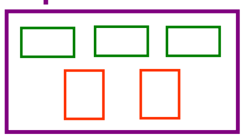
## 4. Quelques pistes à explorer…

**Piste n° 1 : avec des dessins**

**6 panneaux identiques** avec :

**3 paysages** →

**2 portraits** →



**Piste n° 2 : avec des divisions**

**6 panneaux**

| 1 8 | 6 |
|---|---|
| 0 | 3 |

| 2 | 6 |
|---|---|
| 0 | 2 |

**3 paysages** et **2 portraits**

**Piste n° 3 : avec PGCD(18 ; 12)**

Diviseurs de **18** : 1 ; 2 ; 3 ; **6** ; 9 ; 18
Diviseurs de **12** : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; **6** ; 12
Donc **PGCD(18 ; 12)** = **6 panneaux**

# Comment calculer avec des nombres relatifs ?

**Nombre relatif** : c'est un **nombre** avec un **signe**.
**+3** et **-3** sont des **nombres relatifs**.

**Partie numérique** d'un **nombre relatif** : la **partie numérique** de **-3** est **3**.

♥ **Souvenir de 5ème :**

**+ 1**

**- 1**

**Deux ballons placés <u>de la même façon</u> s'ajoutent**.
**Un ballon <u>de face</u>** et **un ballon <u>de dos</u> s'éliminent**.

## 1. Ajouter deux nombres relatifs

• Pour **ajouter** deux **nombres relatifs de même signe**, on **garde le signe** et on **ajoute les parties numériques**.

(**-3**) + (**-1**) = $\boxed{-4}$

on garde le signe — on ajoute

• Pour ajouter deux **nombres relatifs de signes différents**, on **prend le signe** de la **plus grande partie numérique** et on **soustrait les parties numériques**.

(**-3**) + (**+1**) = $\boxed{-2}$

on prend le signe de 3 — on soustrait

## 2. Ajouter plusieurs nombres

Pour **ajouter plusieurs nombres relatifs**, on regroupe les **nombres positifs** entre eux et les **nombres négatifs** entre eux.

**(-7)** + **(+13)** + **(-2)** + **(+6)** =

**(+13)** + **(+6)** + **(-7)** + **(-2)** =

**(+19)** + **(-9)** = $\boxed{+10}$

**Le signe** du résultat est **+** car **19** > **9**.

On peut donner **+10** ou **10** comme réponse, **le signe +** étant sous-entendu.

## 3. Soustraire un nombre relatif

Pour **soustraire** un **nombre relatif**, on **ajoute** son **opposé**.

(-7) **- (- 3)** = (-7) **+ (+3)**

on **ajoute +3**

= $\boxed{-4}$

**L'opposé** de **-3** est **+3**.

Pour obtenir **l'opposé d'un nombre**, on **change son signe**.

## 4. Ecritures simplifiées

Dans une **addition** de **nombres relatifs**, on peut **supprimer les signes + des additions** et les **parenthèses**.

**(-**7**)** **+** **(+**13**)** **+** **(-**2**)** =

**-**7 **+** 13 **-** 2 = $\boxed{+4}$

**<u>Attention</u>** :

- **ne pas toucher** aux **signes** des **nombres relatifs**.
- s'il y a des **soustractions** de **nombres relatifs**, d'abord **ajouter l'opposé**.

## 5. Multiplier deux nombres relatifs

- Le **produit** de deux **nombres relatifs** de **même signe** est **positif**.

$(+4) \times (+3) = \boxed{+12}$

$(-10) \times (-2) = \boxed{+20}$

| × | + | - |
|---|---|---|
| + | + | - |
| - | - | + |

- Le **produit** de deux **nombres relatifs** de **signes différents** est **négatif**.

$(-5) \times (+3) = \boxed{-15}$

$(+3) \times (-2) = \boxed{-6}$

## 6. Diviser deux nombres relatifs

La règle est la même pour **diviser** deux **nombres relatifs** que pour les **multiplier**.

$\frac{-10}{-2} = \boxed{+5}$

**La division se termine**.

$\frac{-5}{+3} = \boxed{-\frac{5}{3}}$

**La division ne se termine pas**, on laisse le résultat **en fraction.**

## 7. Signe d'une puissance d'un nombre relatif

- Une puissance d'un **nombre positif** est un **nombre positif**.

$(+5)^3 = \boxed{+125}$

- Une puissance d'un **nombre négatif** est un nombre :

- **positif** si **l'exposant** est **pair** ;
- **négatif** si **l'exposant** est **impair**.

$(-3)^2 = \boxed{+9}$

Exposant pair Positif

$(-3)^3 = \boxed{-27}$

Exposant impair Négatif

**Attention aux parenthèses avec les nombres négatifs :**

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = \boxed{+9}$

**L'exposant** porte sur la **parenthèse**.

$-3^2 = -(3 \times 3) = \boxed{-9}$

**L'exposant** porte seulement sur le **nombre 3**, donc on retrouve **le signe - au résultat.**

## 8. Priorités

**PA PU MD AS**

**Parenthèses** **Puissances** × ÷ + -

$-3 + (-2)^2 \times (1 - 4) - 5 =$

$-3 + (-2)^2 \times (-3) - 5 =$

$-3 + 4 \times (-3) - 5 =$

$-3 - 12 - 5 = \boxed{-20}$

- On commence par la **parenthèse** : $(1 - 4) = -3$
- La **puissance** : $(-2)^2 = +4$
- La **multiplication** : $+4 \times (-3) = -12$
- C'est une écriture simplifiée, uniquement des nombres négatifs **à ajouter**, c'est comme si on avait : $(-3) + (-12) + (-5)$.

# Comment calculer avec des puissances ?

## 1. Puissances d'exposant positif

$\mathbf{a^n} = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}$

**n** est l'**exposant**. **n** facteurs égaux à **a**.

Ex : $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = \boxed{64}$

$a^0 = 1$ et $a^1 = a$

Ex : $5^0 = \boxed{1}$ $(-3)^1 = \boxed{-3}$

**Pour les signes**, voir la fiche sur **les nombres relatifs n°7 p 10**.

## 2. Puissances d'exposant négatif

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $a^{-n}$ est **l'inverse** de $a^n$.

$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$

$(-2)^{-4} = \dfrac{1}{(-2)^4} = \boxed{\dfrac{1}{16}}$

$(-2)^4$ est **positif** car c'est une puissance d'un **nombre négatif d'exposant pair**.

## 3. Multiplication ou division avec des nombres identiques

$a^n \times a^p = a^{n+p}$

- $7^2 \times 7^3 = 7^{2+3} = \boxed{7^5}$

*On **ajoute** les exposants **2** et **3**.*

- $3^{-1} \times 3^9 = 3^{-1+9} = \boxed{3^8}$

*On **ajoute** les exposants **-1** et **9**
Ce sont des **nombres relatifs**, donc pour **ajouter -1** et **+9** de **signes différents**, on fait une **soustraction** et on prend **le signe** de **9**.*

$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

- $\dfrac{4^2}{4^7} = 4^{2-7} = \boxed{4^{-5}}$ *On **soustrait** **7** à **2**.*

- $\dfrac{8^3}{8^{-1}} = 8^{3-(-1)}$
$= 8^{3+(+1)}$
$= \boxed{8^4}$

*On **soustrait** **-1** à **3**.
**(-1)** est un **nombre relatif**, donc pour le **soustraire**, on **ajoute** **son opposé (+1)**.*

## 4. Multiplication ou division avec des exposants identiques

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$

$7^2 \times 3^2 = (7 \times 3)^2 = \boxed{21^2}$

$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

$\dfrac{12^2}{4^2} = \left(\dfrac{12}{4}\right)^2 = \boxed{3^2}$

## 5. Nombre deux fois de suite à une puissance

$(a^n)^p = a^{n \times p}$ $(5^3)^2 = 5^{3\times2} = \boxed{5^6}$

☞ **Pas de formule** pour **2 nombres différents** à **des puissances différentes**.

$5^2 \times 2^3 =$

$25 \times 8 = \boxed{200}$

☞ **Pas de formule** pour **l'addition** et **la soustraction**.
On utilise **PAPUMDAS**.

| | |
|---|---|
| ***Puissance*** | $-4^2 + 4 \times 25 + (-3)^2 =$ |
| ***Multiplication*** | $-16 + 4 \times 25 + 9 =$ |
| ***Ecriture simplifiée*** | $-16 + 100 + 9 = \boxed{93}$ |

# Comment calculer avec des puissances de 10 ?

## 1. Puissance de 10

**Puissance de 10 d'exposant positif**

$2 \times 10^3 = \boxed{2\,000}$

$3,4 \times 10^2 = \boxed{340}$

*On décale la virgule vers la **droite**.*

On obtient un nombre **plus grand**.

**Puissance de 10 d'exposant négatif**

$2 \times 10^{-3} = \boxed{0,002}$

$3,4 \times 10^{-2} = \boxed{0,034}$

*On décale la virgule vers la **gauche**.*

On obtient un nombre **plus petit**.

## 2. Ecriture scientifique

Donner **l'écriture scientifique** de **32 000** :

Il faut trouver un nombre qui s'écrit

**....** $\times$ **10**$^{\cdots}$

**Nombre entre 1 et 10**
(1 inclus et 10 exclu)

Le nombre cherché est **3,2**

donc **32 000** = $\boxed{3,2 \times 10^4}$

## 3. Utiliser $(a^n)^p = a^{n \times p}$

$25 \times (10^{-3})^2 \times 8 =$

$\boxed{200 \times 10^{-6}}$

On calcule les **nombres entre eux** et **les puissances de 10 entre elles**.

**Attention :**

**Exposant :** $(-3) \times 2 = -6$

## 4. Utiliser $a^n \times a^p = a^{n+p}$

$12 \times 10^3 \times 2 \times 10^2 =$

$\boxed{24 \times 10^5}$

On calcule les **nombres entre eux** et **les puissances de 10 entre elles**.

**Attention :**

$7 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^2 = \boxed{21 \times 10^{-2}}$

**Exposant :** $(-4) + (+2) = -2$

## 5. Utiliser $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$$\frac{25 \times 10^6}{15 \times 10^2} = \frac{25}{15} \times 10^{6-2}$$

$$= \boxed{\frac{5}{3} \times 10^4}$$

On calcule les **nombres entre eux** et **les puissances de 10 entre elles**.

**Attention :** $\dfrac{10^3}{10^{-2}} = \boxed{10^5}$

**Exposant :** $3 - (-2) = 3 + (+2)$
$= 5$

## 6. Calculs divers

- $2 \times 10^3 + 5 \times 10^2 = 2\,000 + 500$
  $= \boxed{2\,500}$

☞ **Pas de formule** pour **l'addition** et **la soustraction** : on écrit les nombres **sous forme décimale** et on calcule.

- $$\frac{5 \times 10^2 \times \cancel{3} \times 10^{-3}}{\cancel{3} \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-1}} = \frac{5}{2} \times \frac{10^{-1}}{10^{-5}}$$
  $$= \boxed{2,5 \times 10^4}$$

On calcule **5 : 2** car le résultat est un **nombre décimal**.

**Exposant :** $(-1) - (-5) =$
$(-1) + (+5) = +4$

# Comment calculer avec des fractions ?

## 1. Ajouter ou soustraire (1er cas)

Il faut **mettre les fractions** au **même dénominateur**.

**Cas simple :** $\frac{2}{5} - \frac{7}{15}$

**15** est dans **la table de 5**, donc on choisit **15** comme **dénominateur**.

$$\frac{2}{5} - \frac{7}{15} = \frac{6}{15} - \frac{7}{15} = \boxed{\frac{-1}{15}}$$

## 2. Ajouter ou soustraire (2ème cas)

$\frac{7}{12} + \frac{2}{15}$ On écrit **les multiples** de **12** et **15** et on s'arrête **au premier multiple commun**.

**Multiples de 12 :** 12, 24, 36, 48, **60**
**Multiples de 15 :** 15, 30, 45, **60**

On choisit **60**, c'est **5×12** et **4×15**.

$$\frac{7}{12} + \frac{2}{15} = \frac{35}{60} + \frac{8}{60} = \boxed{\frac{43}{60}}$$

## 3. Multiplier

Il faut **décomposer les nombres** pour **essayer de simplifier** avant d'effectuer les multiplications.

$$\frac{35}{12} \times \frac{18}{25} = \frac{7\times\cancel{5}}{\cancel{6}\times 2} \times \frac{\cancel{6}\times 3}{\cancel{5}\times 5}$$

$$= \frac{7\times 3}{2\times 5}$$

$$= \boxed{\frac{21}{10}}$$

## 4. Diviser

Pour **diviser par une fraction**, **on multiplie par son inverse**.

**L'inverse** de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$.

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \boxed{\frac{9}{10}}$$

$\frac{3}{5} : \frac{2}{3}$ et $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}}$ : c'est **le même calcul**.

## 5. Plusieurs opérations

**Penser à PAPUMDAS**

$\frac{2}{3} + \frac{7}{3} \times \frac{5}{4}$ : *même si on en a envie,*

***on ne commence pas*** *par* $\frac{2}{3} + \frac{7}{3}$

*mais par* ***la multiplication*** *!*

$$\frac{2}{3} + \frac{35}{12} = \frac{8}{12} + \frac{35}{12} = \boxed{\frac{43}{12}}$$

On a choisi **12** comme **dénominateur** car **12** est dans **la table de 3**.

## 6. Plusieurs opérations (suite)

$$\frac{2 + \frac{3}{5}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{1} + \frac{3}{20}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} =$$

***Multiplication d'abord***

$$\frac{\frac{40}{20} + \frac{3}{20}}{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}} = \frac{\frac{43}{20}}{\frac{1}{6}} = \frac{43}{20}\times\frac{6}{1} =$$

***Même dénominateur***

***Multiplier par l'inverse***

$$\frac{43}{\cancel{2}\times 10} \times \frac{\cancel{2}\times 3}{1} = \frac{43\times 3}{10\times 1} = \boxed{\frac{129}{10}}$$

***Simplifier***

# Comment calculer avec des racines carrées ?

## 1. Carrés parfaits

**A savoir par cœur :**

$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{81} = 9$
$\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{49} = 7$ $\sqrt{169} = 13$

**4**, **9**, **16** etc…
sont des **carrés parfaits**.

## 2. Mettre au carré une racine

$\sqrt{5}$ est **le nombre positif** dont **le carré** est **5**.

$$(\sqrt{5})^2 = 5$$

Quand **on met au carré la racine carrée d'un nombre**, on retrouve **le nombre de départ**.

## 3. Utiliser $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

**a.** $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = \boxed{6}$

On utilise cette méthode car **3** $\times$ **12** = **36**, qui est un **carré parfait**.

**b.** $\sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \boxed{5\sqrt{2}}$

On choisit **25** car c'est **le plus grand carré parfait** avec lequel on peut décomposer **50**.

## 4. Utiliser $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

**a.** $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

On utilise cette méthode car **en simplifiant** $\dfrac{12}{3}$, on obtient un **carré parfait** : **4**.

**b.** $\sqrt{\dfrac{50}{9}} = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{9}} = \dfrac{\sqrt{25} \times \sqrt{2}}{3} = \boxed{\dfrac{5\sqrt{2}}{3}}$

On utilise cette méthode car
- **50** peut se décomposer avec un **carré parfait** ;
- **9** est un **carré parfait**.

## 5. Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$

$$3\sqrt{8} - 5\sqrt{32} + 3\sqrt{2} =$$

Un indice : **8**, **32** (et aussi **2**) sont **dans la table de 2**.

**On décompose 8** et **32** à l'aide de **la table de 2** pour faire apparaître **le plus grand carré parfait possible**.

$$3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} - 5 \times \sqrt{16} \times \sqrt{2} + 3\sqrt{2} =$$
$$3 \times 2 \times \sqrt{2} - 5 \times 4 \times \sqrt{2} + 3\sqrt{2} =$$
$$6\sqrt{2} - 20\sqrt{2} + 3\sqrt{2} =$$
$$\boxed{-11\sqrt{2}}$$

## 6. Ecrire sous la forme $a\sqrt{3}$

$$4\sqrt{75} - 7\sqrt{12} + \sqrt{27} =$$

Avantage : on sait qu'il faut faire apparaître $\sqrt{3}$, donc il faut **décomposer les nombres 75**, **12** et **27** à l'aide de **la table de 3**.

$$4 \times \sqrt{25} \times \sqrt{3} - 7 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} + \sqrt{9} \times \sqrt{3} =$$
$$4 \times 5 \times \sqrt{3} - 7 \times 2 \times \sqrt{3} + 3 \times \sqrt{3} =$$
$$20\sqrt{3} - 14\sqrt{3} + 3\sqrt{3} =$$
$$\boxed{9\sqrt{3}}$$

# Comment développer et réduire ?

## 1. Réduire

$2a - 3a^2 - 7 + 4a^2 - 5a =$
$+1a^2 - 3a - 7 =$
ou $\boxed{a^2 - 3a - 7}$

On regroupe les $a^2$ entre eux, les $a$ entre eux et les **nombres** entre eux.

Attention : il faut toujours prendre l'expression **avec son signe**.
Par exemple, on ajoute $-3a^2$ avec $+4a^2$, c'est la même règle des signes que pour $-3 + 4$ ou $(-3) + (+4)$.

## 2. Supprimer des parenthèses précédées d'un signe +

Comme pour **les nombres**,
on **peut supprimer le signe +**
**des additions et les parenthèses**.

**Nombres** $(-5) + (+7) =$
$-5 \quad +7 = \boxed{+2}$

**Parenthèses** $(-3a + 4) + (+2a - 1) =$
$-3a + 4 \quad + 2a - 1 =$
$-1a + 3 = \boxed{-a + 3}$

## 3. Supprimer des parenthèses précédées d'un signe -

Comme pour **les nombres**,
pour **soustraire** une **parenthèse**,
on **ajoute** son **opposé**.

**Nombres** $(-3) - (+7) =$
$(-3) + (-7) =$
$\boxed{-3 \quad -7}$

\+ sous-entendu

**Parenthèses** $(-2a + 3) - (5a - 4) =$
$(-2a + 3) + (-5a + 4) =$
$-2a + 3 \quad -5a + 4 =$
$\boxed{-7a + 7}$

**Attention :** pour prendre l'**opposé** de la **parenthèse**, il faut **changer tous les signes** dans **la parenthèse**.

$3 - (-2a + 4) + (-3a - 5) =$
$3 + (+2a - 4) + (-3a - 5) =$
$3 \quad +2a - 4 \quad -3a - 5 =$
$-1a - 6 = \boxed{-a - 6}$

- On repère les **parenthèses** précédées **d'un signe -**.
- On **ajoute l'opposé** de **la parenthèse**.
- On supprime les **signes + d'addition** et les **parenthèses**.

Remarque : on peut passer directement de la 1ère à la 3ème ligne.

## 4. Distributivité simple
## Nombre positif

$3\,(4a - 5) = \boxed{12a - 15}$

On multiplie **4a** par **3** et on multiplie **5** par **3**. **Le signe reste**.

**Attention :**

$5 + 4\,(2a - 3) = 5 + 8a - 12$
$= \boxed{8a - 7}$

La **multiplication** a **la priorité**.

## 5. Distributivité simple
## Nombre négatif

**Méthode 1** : $-4\,(2a - 3) = -(8a - 12)$
$= +(-8a + 12)$
$= \boxed{-8a + 12}$

- On multiplie par **4**.
- On ajoute **l'opposé** de la **parenthèse**.

**Méthode 2** : $-4\,(2a - 3) = \boxed{-8a + 12}$

- On multiplie par **- 4** en utilisant la règle des signes de la **multiplication**.

# Comment développer et réduire ?
# Double distributivité et identités remarquables

## 1. Double distributivité

× multiplication

$(3a - 2)(-4a + 5) =$

$-12a^2 + 15a + 8a - 10 =$

$\boxed{-12a^2 + 23a - 10}$

- On **multiplie** chaque terme de la **1ère parenthèse** par chaque terme de la **2ème parenthèse** : **règle des signes** de la **multiplication**.
- On **réduit** : **règle des signes** de **l'addition**.

On peut présenter la double distributivité comme **une multiplication** :

$$\begin{array}{rr} & -4a + 5 \\ \times & 3a - 2 \\ \hline & +8a - 10 \\ -12a^2 + 15a & \\ \hline \boxed{-12a^2 + 23a - 10} & \end{array}$$

On place les termes de **même nature** l'un au-dessus de l'autre.

## 2. Utiliser $(a + b)^2$

$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

- $(5x + 1)^2 = \boxed{25x^2 + 10x + 1}$

  $(5x)^2 \quad 2 \times 5x \times 1 \quad 1^2$

- $103^2 = (100 + 3)^2$

  $= 10\,000 + 600 + 9$

  $100^2 \quad 2 \times 100 \times 3 \quad 3^2$

  $= \boxed{10\,609}$

## 3. Utiliser $(a - b)^2$

$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

- $(5x - 1)^2 = \boxed{25x^2 - 10x + 1}$

  $(5x)^2 \quad 2 \times 5x \times 1 \quad 1^2$

- $97^2 = (100 - 3)^2$

  $= 10\,000 - 600 + 9$

  $100^2 \quad 2 \times 100 \times 3 \quad 3^2$

  $= \boxed{9\,409}$

## 4. Utiliser $(a + b)(a - b)$

$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$

- $(5x + 3)(5x - 3) = \boxed{25x^2 - 9}$

  $(5x)^2 \quad 3^2$

- $102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2)$

  $= 100^2 - 2^2$

  $= 10\,000 - 4$

  $= \boxed{9\,996}$

## 5. Un peu de tout

$5 - \underbrace{2(5-3x)} - \underbrace{(4x-3)(2x-1)} =$

$5 - (10 - 6x) - (8x^2 - 4x - 6x + 3) =$

$5 + (-10 + 6x) + (-8x^2 + 4x + 6x - 3) =$

$5 \quad -10 + 6x \quad -8x^2 + 4x + 6x - 3 =$

$\boxed{-8x^2 + 16x - 8}$

- **Priorité** de la **multiplication**.
- **Signe -** devant une **parenthèse** : on **ajoute l'opposé** de la **parenthèse**.
- **Suppression des signes + d'addition** et **des parenthèses**.

## Comment calculer une expression littérale pour une valeur donnée ?

**1. Calculer $(3x-1)(5+4x)$ pour $x=-2$.**

On remplace $x$ par $-2$. On obtient :

$(-6-1)(5-8) = (-7)\times(-3)$

$= \boxed{+21}$

$3\times(-2)$ $4\times(-2)$

On utilise **PAPUMDAS**.

**2. Calculer $3x^2 - 4x + 5$ pour $x = \frac{2}{3}$.**

$3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\times\frac{2}{3} + 5 =$

$3\times\frac{4}{9} - 4\times\frac{2}{3} + 5 =$

$\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{15}{3} = \boxed{\frac{11}{3}}$

- On remplace $x$ par $\frac{2}{3}$.
- On utilise **PAPUMDAS**.

## Comment factoriser ?

### 1. Un nombre en facteur

$25x^2 - 10 = \boxed{5(5x^2-2)}$

On **met en facteur le plus grand diviseur commun** de 25 et de 10.

On **met** donc **5 en facteur**.

### 2. Une lettre en facteur

$5x^4 - 2x^3 + 3x^2 = \boxed{x^2(5x^2-2x+3)}$

On **met en facteur la plus petite puissance de $x$**.

On **met** donc **$x^2$ en facteur**.

### 3. Une lettre et un nombre

$-24x^2 + 32x = \boxed{8x(-3x+4)}$

- On **met en facteur le plus grand diviseur commun** de 24 et de 32, c'est **8**.
- On met en facteur **la plus petite puissance de $x$**. C'est $x$.
- On **met** donc **$8x$ en facteur**.

### 4. Une parenthèse

$\underbrace{(x-3)(x+7)} - \underbrace{(5x-4)(x-3)} =$

$(x-3)[(x+7)-(5x-4)] =$

$(x-3)(x+7-5x+4) =$

$\boxed{(x-3)(-4x+11)}$

☞ **Penser à ajouter l'opposé** de $(5x-4)$ car il y a un **signe -** avant **la parenthèse $(5x-4)$**.

### 5. Une parenthèse

$(3x+5)(2-x) + (2-x)^2 =$

$(3x+5)(2-x) + (2-x)(2-x) =$

$(2-x)[(3x+5)+(2-x)] =$

$(2-x)(3x+5+2-x) =$

$\boxed{(2-x)(2x+7)}$

☞ **Pas de changement de signe** car il y a **un signe +** avant **la parenthèse $(2-x)$**.

$(x-3)(x+7) - (x-3) =$

$(x-3)(x+7) - (x-3)\times 1 =$

$(x-3)[(x+7)-1] =$

$(x-3)(x+7-1) =$ **Astuce** du "**1**".

$\boxed{(x-3)(x+6)}$

☞ **Ne pas oublier "1"** car $(x-3) = (x-3)\times 1$.

# Comment factoriser avec une identité remarquable ?

## 1. Utiliser $(a + b)^2$ ou $(a - b)^2$

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

$$25x^2 + 30x + 9 = \boxed{(5x + 3)^2}$$

$(5x)^2$ $2 \times 5x \times 3$ $3^2$

On repère **cette méthode** car :

- il y a **deux carrés** $25x^2$ et $9$ ;
- il y a un + devant le **2ème terme**.

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

$$16x^2 - 8x + 1 = \boxed{(4x - 1)^2}$$

$(4x)^2$ $2 \times 4x \times 1$ $1^2$

On repère **cette méthode** car :

- il y a **deux carrés** $16x^2$ et $1$ ;
- il y a un - devant **le 2ème terme**.

## 2. Utiliser $(a + b)(a - b)$

$$a^2 - b^2 = \boxed{(a + b)(a - b)}$$

$$25x^2 - 9 = \boxed{(5x + 3)(5x - 3)}$$

$(5x)^2$ $3^2$

On repère **cette méthode** car :

- il y a seulement **deux carrés** : $25x^2$ et $9$ ;
- ils sont séparés par **un signe -**.

$49 - (3x + 2)^2 =$

$7^2 - (3x + 2)^2 =$

$[7 + (3x + 2)][7 - (3x + 2)] =$

$[7 + (3x + 2)][7 + (-3x - 2)] =$

$(7 + 3x + 2)(7 - 3x - 2) =$

$\boxed{(3x + 9)(-3x + 5)}$

☞ **Penser à ajouter l'opposé** de $(3x + 2)$ car il y a **un signe -** avant **la parenthèse $(3x + 2)$**.

## 3. Utiliser $(a + b)(a - b)$

$(4x - 1)^2 - (5x + 2)^2 =$

$[(4x-1)+(5x+2)]\,[(4x-1)-(5x+2)]=$

$[(4x-1)+(5x+2)]\,[(4x-1)+(-5x-2)]=$

$[4x - 1 + 5x + 2]\,[4x - 1 - 5x - 2] =$

$\boxed{(9x + 1)(-x - 3)}$

☞ **Penser à ajouter l'opposé** de $(5x + 2)$ car il y a **un signe –** avant **la parenthèse $(5x + 2)$**.

## 4. Avec une racine carrée

$$4x^2 - 3 = \boxed{(2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})}$$

$(2x)^2$ $(\sqrt{3})^2$

☞ **Rappel** : $(\sqrt{3})^2 = 3$

On utilise $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

# Comment résoudre une équation ou inéquation du 1er degré ?

## 1. Résoudre l'équation $-3x - 5 = 8$

Il doit y avoir **d'un côté** du "=" les **termes en $x$** et **de l'autre côté les nombres**.

Pour cela, on **ajoute 5 aux deux membres** :

$$-3x = 5 + 8$$
$$-3x = 13$$
$$x = \boxed{\frac{13}{-3}}$$

Pour obtenir $x$, on **divise les deux membres par -3**.

## 2. Résoudre $4x + 5 = -7x + 4$

$$4x = -7x + 4 - 5$$
$$4x + 7x = +4 - 5$$
$$11x = -1$$
$$x = \boxed{\frac{-1}{11}}$$

On procède de la même façon, mais :

- on **soustrait 5** aux **2 membres** ;
- on **ajoute $7x$** aux **deux membres** ;
- on **divise** les **deux membres par 11**.

## 3. Résoudre $3(x - 2) = -4 + (x + 5)$

$$3x - 6 = -4 + x + 5$$
$$3x - 6 = +x + 1$$
$$3x - x = +6 + 1$$
$$2x = 7$$
$$x = \frac{7}{2}$$
$$x = \boxed{3{,}5}$$

On effectue la division car on obtient un **nombre décimal**.

On procède de la même façon, mais il faut d'abord **développer** et **réduire les deux membres**.

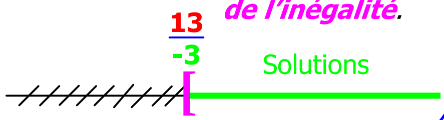
## 4. Résoudre l'inéquation $-3x - 5 \leq 8$

On procède de la même façon que pour résoudre une équation.

**sauf**

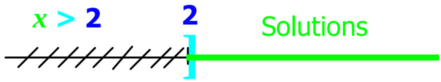
*Quand on **divise par un nombre négatif**, on **change le sens de l'inégalité**.*

$$-3x - 5 \leq 8$$
$$-3x \leq 13$$
$$x \geq \boxed{\frac{13}{-3}}$$

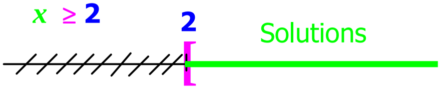



## 5. Représenter les solutions d'une inéquation

$x > 2$

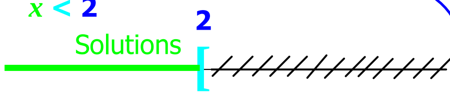



$x \geq 2$

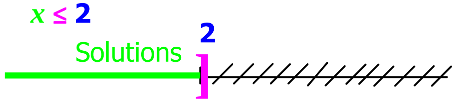



$x$ **est plus grand que 2** donc **les solutions** sont **à droite** de **2**.

$x < 2$




$x \leq 2$




$x$ **est plus petit que 2** donc **les solutions** sont **à gauche** de **2**.

Lorsqu'il y a le **signe** "=" en plus de "<" ou ">", on oriente **le crochet du côté des solutions** pour indiquer que **2 convient**.

## Comment résoudre une équation produit ?

### 1. Résoudre l'équation :

$(2x-3)(-4x+2) = 0$

Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

donc $2x-3 = 0$ ou $-4x+2 = 0$

| | |
|---|---|
| $2x-3 = 0$ | $-4x+2 = 0$ |
| $2x = 3$ | $-4x = -2$ |
| $x = \frac{3}{2}$ | $x = \frac{-2}{-4}$ |
| $x = 1{,}5$ | $x = \frac{1}{2}$ |
| | $x = 0{,}5$ |

L'équation a 2 solutions :

$\boxed{1{,}5 \text{ et } 0{,}5}$

### 2. Résoudre l'équation :

$5(4x+5)(-3x-2) = 0$

Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

donc $4x+5 = 0$ ou $-3x-2 = 0$

(5 ne peut pas être égal à 0.)

| | |
|---|---|
| $4x+5 = 0$ | $-3x - 2 = 0$ |
| $4x = -5$ | $-3x = 2$ |
| $x = \frac{-5}{4}$ | $x = \frac{2}{-3}$ |
| $x = -\frac{5}{4}$ | $x = -\frac{2}{3}$ |
| $x = -1{,}25$ | |

L'équation a 2 solutions :

$\boxed{-1{,}25 \text{ et } -\frac{2}{3}}$

### 3. Résoudre l'équation : $(2x + 1)^2 = 36$

$(2x + 1)^2 = 36$

$(2x + 1)^2 - 36 = 0$

- *on soustrait 36 pour que le membre de droite soit nul.*

$(2x + 1)^2 - 6^2 = 0$

- *on écrit 36 sous la forme $6^2$.*

$[(2x + 1) + 6][(2x + 1) - 6] = 0$

- *on factorise à l'aide de :* $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(2x + 1 + 6)(2x + 1 - 6) = 0$

$(2x + 7)(2x - 5) = 0$

- *on obtient une équation produit que l'on sait résoudre.*

## Comment résoudre une équation $x^2 = a$ ?

### 1. Résoudre l'équation : $x^2 = 25$

$x^2 = 25$

donc $x = \sqrt{25} = +5$ ou $x = -\sqrt{25} = -5$

L'équation a 2 solutions :

$\boxed{+5 \text{ et } -5}$

### 2. Résoudre l'équation : $x^2 = 3$

$x^2 = 3$

donc $x = +\sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

L'équation a 2 solutions :

$\boxed{\sqrt{3} \text{ et } -\sqrt{3}}$

### 3. Résoudre l'équation : $x^2 = 0$

$x^2 = 0$

L'équation a une seule solution :

$x = \boxed{0}$

### 4. Résoudre l'équation : $x^2 = -4$

$x^2 = -4$

Un carré est toujours positif,

donc $x^2$ ne peut pas être égal à -4.

L'équation n'a pas de solution.

# Comment faire un exercice récapitulatif ?

## Enoncé de l'exercice

Soit **A** = $(3x-1)(x+2) - (3x-1)$.

**1.** Développer, réduire et ordonner A.

**2.** Factoriser A.

**3.** Calculer la valeur de A pour $x = 2$ puis pour $x = \frac{1}{3}$.

**4.** Résoudre $(3x-1)(x+1) = 0$.

## 1. Développer, réduire et ordonner A

**A** = $(3x-1)(x+2) - (3x-1)$

**A** = $(3x^2+6x-1x-2) - (3x-1)$

**A** = $(3x^2+6x-1x-2) + (-3x+1)$

**A** = $3x^2+6x-1x-2-3x+1$

**A** = $\boxed{3x^2+2x-1}$

## 2. Factoriser A

**A** = $(3x-1)(x+2) - (3x-1)$

**A** = $(3x-1)[(x+2) - 1]$

**A** = $(3x-1)[x+2-1]$

**A** = $\boxed{(3x-1)(x+1)}$

☞ *On peut **vérifier** que le résultat de la **factorisation** est égal au résultat du **développement**.*

$(3x-1)(x+1) = 3x^2 + 3x - 1x - 1$

$= 3x^2 + 2x - 1$

## 3. Calculer la valeur de A pour $x = 2$

A = $3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1$

A = $3 \times 4 + 2 \times 2 - 1$

A = $12 + 4 - 1$

**A** = $\boxed{15}$

☞ *On peut au choix **remplacer** $x$ par **2** :*

- *dans la **factorisation** ou le **développement** (car **on a vérifié** que le résultat de la **factorisation** est égal au résultat du **développement**).*
- *dans l'**énoncé** (c'est **plus sûr** mais **plus long** et **plus compliqué**).*

## 4. Calculer la valeur de A pour $x = \frac{1}{3}$

A = $(3 \times \frac{1}{3} - 1) \times (\frac{1}{3} + 1)$

A = $(1 - 1) \times (\frac{1}{3} + 1)$

A = $0 \times (\frac{1}{3} + 1)$ **A** = $\boxed{0}$

☞ *Pour $x = \frac{1}{3}$, on a intérêt à utiliser la **factorisation** car il y a une chance qu'**une des parenthèses soit égale à zéro**, ce qui est le cas ici, donc **ce n'est pas la peine de calculer** la $2^{ème}$ **parenthèse**. (**0** multiplié par n'importe quel nombre est égal à **zéro**).*

## 5. Résoudre $(3x-1)(x+1) = 0$

Si **a × b = 0** alors **a = 0 ou b = 0**.

donc $3x-1 = 0$ ou $x+1 = 0$

| | |
|---|---|
| $3x-1 = 0$ | $x+1 = 0$ |
| $3x = 1$ | $x = -1$ |
| $x = \frac{1}{3}$ | |

**L'équation** a **2 solutions** $\boxed{\frac{1}{3} \text{ et } -1}$ .

<u>*Remarque*</u> *:*

*On retrouve souvent la **factorisation** dans **l'équation produit**. On retrouve aussi la valeur $\frac{1}{3}$ de la question **4**.*

# Comment résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues ?

## 1. Par combinaison : Résoudre $\begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

### Calcul de $x$ (on élimine $y$)

$$\begin{cases} 3x + 5y = 21 & \times 3 \\ 2x + 3y = 13 & \times 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 15y = 63 \\ 10x + 15y = 65 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & 10x + \cancel{15y} = 65 \\ - & 9x + \cancel{15y} = 63 \\ \hline & x = 2 \end{array}$$

*On choisit de multiplier par **3** et **5** pour obtenir **15y** dans les 2 équations qui vont s'éliminer par soustraction.*

### Calcul de $y$ (on élimine $x$)

$$\begin{cases} 3x + 5y = 21 & \times 2 \\ 2x + 3y = 13 & \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 10y = 42 \\ 6x + 9y = 39 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \cancel{6x} + 10y = 42 \\ - & \cancel{6x} + 9y = 39 \\ \hline & y = 3 \end{array}$$

*On choisit de multiplier par **2** et **3** pour obtenir **6x** dans les 2 équations qui vont s'éliminer par soustraction.*

### Vérification

$$\begin{cases} 3 \times 2 + 5 \times 3 = 6 + 15 = 21 \\ 2 \times 2 + 3 \times 3 = 4 + 9 = 13 \end{cases}$$

**La solution** du système est $\boxed{(2\ ;\ 3)}$.

*Dans **le système d'équations** donné dans l'énoncé, on **remplace** $x$ et $y$ **par les nombres trouvés**. On doit obtenir **21** et **13**.*

## 2. Par substitution : Résoudre $\begin{cases} 3x + 2y = 21 \\ x + y = 9 \end{cases}$

*On exprime $y$ en fonction de $x$ dans la 2ème équation car le nombre devant $y$ est **1**, autrement, des fractions apparaîtraient.*

### Calcul de $x$

(on exprime $y$ en fonction de $x$)

$$\begin{cases} 3x + 2y = 21 \\ y = 9 - x \end{cases}$$

*On remplace $y$ par sa valeur.*

$$\begin{cases} 3x + 2(9 - x) = 21 \\ y = 9 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 18 - 2x = 21 \\ y = 9 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 18 = 21 \\ y = 9 - x \end{cases}$$

*On conserve $y = 9 - x$ tout le long du calcul.*

$$\begin{cases} x = 21 - 18 \\ y = 9 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 9 - x \end{cases}$$

### Calcul de $y$

(on remplace $x$ par sa valeur)

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 9 - 3 \end{cases}$$

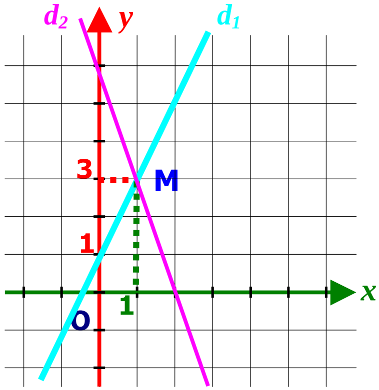
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

### Vérification

$$\begin{cases} 3 \times 3 + 2 \times 6 = 9 + 12 = 21 \\ 3 + 6 = 9 \end{cases}$$

**La solution** du système est $\boxed{(3\ ;\ 6)}$

## 3. Graphiquement : $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -3x + 6 \end{cases}$




- On trace la droite $d_1$ d'équation
  $y = 2x + 1$.
- On trace la droite $d_2$ d'équation
  $y = -3x + 6$.
- On lit les coordonnées du **point d'intersection M** des **2 droites** $d_1$ et $d_2$ sur le dessin : **M** (**1** ; **3**)
- **La solution** du système est $\boxed{(1\ ;\ 3)}$.

## Comment mettre un problème en équation ?

### Enoncé

Un groupe de 9 personnes s'est inscrit pour un voyage. Ce groupe est composé d'adultes et d'enfants.

Les adultes paient 30 € et les enfants 20 €. Le responsable du groupe a remis 210 € à l'organisateur.

Combien y a-t-il d'adultes et d'enfants dans ce groupe ?

### 1. Choix des inconnues

On désigne par :
- $a$ le **nombre d'adultes** ;
- $e$ le **nombre d'enfants**.

### 2. Mise en équation

- Le groupe est formé de **9 personnes**.
  donc $a + e = 9$
- Le voyage coûte **210 €**.
  donc $30a + 20e = 210$

Prix pour $a$ adultes qui payent chacun 30 €.

Prix pour $e$ enfants qui payent chacun 20 €.

### 3. Résolution du système

Il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} 30a + 20e = 210 \\ a + e = 9 \end{cases}$$

Après **avoir divisé par 10** la **1ère équation**, cela revient à résoudre :

$$\begin{cases} 3a + 2e = 21 \\ a + e = 9 \end{cases}$$

Ce système est résolu à la page précédente, on trouve :

$a = 3$ et $e = 6$.

### 4. Conclusion

**Vérifions** :

Prix pour **3 adultes** : $30 \times 3 = 90$ €

Prix pour **6 enfants** : $20 \times 6 = 120$ €

Prix total : $90 + 120 = 210$ €

Il y a 3 adultes et 6 enfants donc **9 personnes**.

# Comment reconnaître une situation de proportionnalité ?

## 1. Coefficient de proportionnalité

Sonneries de téléphone mobile :

| Nombre de sonneries | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| Prix payé (en €) | 3 | 6 | 15 |

× 3

En **divisant** les nombres de la **2ème ligne** par ceux de la **1ère**, on trouve toujours **3** donc c'est une situation de **proportionnalité**.

**3** est le **coefficient de proportionnalité**.

## 2. Produits en croix

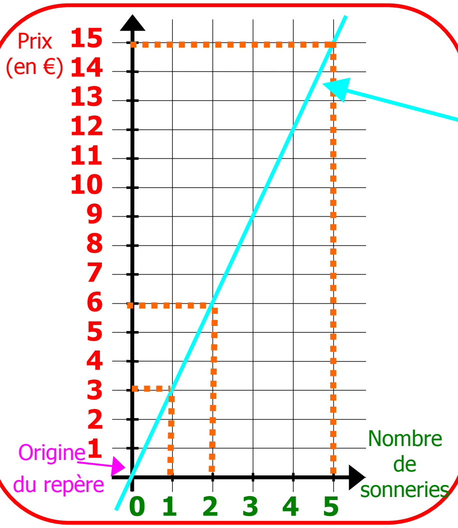
| Nombre de sonneries | 1 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| Prix payé (en €) | 3 | 6 | 15 |

$1 \times 6 = 6$
$2 \times 3 = 6$ } **Produits en croix égaux**

$2 \times 15 = 30$
$5 \times 6 = 30$ } **Produits en croix égaux**

Les **produits en croix** sont **égaux**, donc c'est une situation de **proportionnalité**.

## 3. Représentation graphique




On obtient une **droite** qui passe par **l'origine du repère**, donc il s'agit d'une situation de **proportionnalité**.

## 4. A l'aide de la relation $y = ax$

On appelle $x$ le **nombre de sonneries** et $y$ le **prix payé**.
On a : $y = 3x$.

$y = 3x$ permet de savoir qu'il s'agit d'une situation de **proportionnalité**.
Le **coefficient de proportionnalité** est **3**.

# Comment calculer une 4ème proportionnelle ?

## 1. Coefficient de proportionnalité

| Nombre | 4 | a | 2 |
|---|---|---|---|
| Prix | 20 | 15 | b |

**Coefficient de proportionnalité** :
$20 : 4 = 5$

$a = 15 : 5 = \boxed{3}$ $\quad b = 2 \times 5 = \boxed{10}$

## 2. Produits en croix

| Nombre | 4 | a | 2 |
|---|---|---|---|
| Prix | 20 | 15 | b |

$a \times 20 = 4 \times 15$ $\quad 4 \times b = 20 \times 2$

$a = \dfrac{4 \times 15}{20} = \boxed{3}$ $\quad b = \dfrac{20 \times 2}{4} = \boxed{10}$

En cas d'erreur, pour calculer **b**, il vaut mieux ne pas utiliser le résultat de **a**.

# Comment calculer avec des pourcentages ?

## 1. Appliquer un pourcentage

**90%** des **150 élèves** de 3$^{\text{ème}}$ ont eu le brevet.
**Combien** d'élèves ont réussi ?

$$150 \times \frac{90}{100} = \boxed{135}$$

**135 élèves ont réussi**.

***Combien*** *: il faut répondre par un* ***nombre****, pas par un pourcentage.*

## 2. Trouver un pourcentage

**120** élèves sur **150** ont réussi au brevet. Quel est le **pourcentage** d'élèves qui ont réussi au brevet ?

$$\frac{120}{150} = \frac{x}{100}$$

*On cherche* ***combien d'élèves sur 100*** *ont réussi.*

donc $x \times 150 = 120 \times 100$

$$x = \frac{120 \times 100}{150}$$

$$x = \boxed{80}$$

**80%** des élèves ont réussi.

## 3. Trouver un nombre après ou avant une augmentation ou réduction (Méthode vue avant la 3$^{\text{ème}}$)

### Après :

Dans un magasin, les prix ont **augmenté** en moyenne de **5%**. Quel est **le nouveau prix** d'une **calculatrice** qui coûtait **20 €** ?

- **Montant** de **l'augmentation** :

$$20 \times \frac{5}{100} = 1$$

- **Nouveau prix** : $20 + 1 = \boxed{21\text{ €}}$

*Pour une* ***réduction****, on* ***soustrait*** *au lieu d'****ajouter****.*

### Avant :

**Soldes** de **20%**.
Quel est **l'ancien prix** d'un **DVD** qui coûte maintenant **12 €** ?

| | | |
|---|---|---|
| **Ancien prix** | **100** | $x$ |
| **Nouveau prix** | **80** | **12** |

**Soldes** de **20%**, donc pour un **ancien prix** de **100 €**, **la réduction** est de **20 €** et **le nouveau prix** est **80 €**. On a : $x \times 80 = 100 \times 12$

$$\text{donc } x = \frac{100 \times 12}{80} = \boxed{15\text{ €}}$$

***Idem*** *pour une* ***augmentation****.*

## 4. Trouver un nombre après ou avant une augmentation ou réduction (3$^{\text{ème}}$)

### Après : (même exemple qu'en **3.**)

Trouver **un prix après une augmentation** de **5%** revient à **multiplier le prix initial 20 €** par :

$$1 + \frac{5}{100} = 1 + 0{,}05 = \boxed{1{,}05}$$

$$\text{Prix initial} \xrightarrow{\div 1{,}05} \text{Prix final}$$

$$20 \div 1{,}05 = \boxed{21\text{ €}}$$

### Avant : (même exemple qu'en **3.**)

Trouver **un prix avant une réduction** de **20%** revient à **diviser le prix final 12 €** par :

$$1 - \frac{20}{100} = 1 - 0{,}20 = \boxed{0{,}8}$$

$$\text{Prix initial} \xleftarrow{\div 0{,}8} \text{Prix final}$$

$$12 \div 0{,}8 = \boxed{15\text{ €}}$$

# Comment convertir des durées ?

## 1. Heures minutes → heures

Convertir **2 h 30 min** en **h**.

**Rappel** : **1 h = 60 min**

**Les durées en heures et en minutes sont proportionnelles.**

| heures | 1 | 0,5 |
|---|---|---|
| minutes | 60 | 30 |

× 60

: 60

**30 min = 0,5 h**

donc **2 h 30 min = 2 h + 0,5 h**

**2 h 30 min** = $\boxed{\textbf{2,5 h}}$

☞ **Attention** à **l'erreur classique** :

**2 h 30 min ≠ 2,30 h**

## 2. Minutes → heures minutes

Convertir **456 minutes** en **h min**.

*Autrement dit, dans **456 minutes** **combien de fois** a-t-on **60 minutes** et **combien de minutes** reste-t-il ?*

*Pour le savoir, on effectue **la division euclidienne** de **456** par **60** :*

| 4 5 6 | 6 0 |
|---|---|
| - 4 2 0 | 7 |
| 3 6 | |

**456 = 7 × 60 + 36**

donc **456 min = 7 h 36 min**

# Comment calculer des grandeurs composées ?

## 1. Grandeur produit

**Le produit de deux grandeurs** donne **une nouvelle grandeur** appelée **grandeur produit**.

**Energie = puissance × durée**

Exemple : Calculer **l'énergie** consommée par une ampoule de **60 W** allumée pendant **8 h**.

$E = 60 \times 8 = \boxed{480 \text{ W.h}}$

Remarque : **L'énergie** est en **W.h** car **la puissance** est en **W** et **la durée** en **h**.

**L'unité du résultat** dépend **des unités des grandeurs** que l'**on multiplie** ou que l'**on divise**.

## 2. Grandeur quotient

**Le quotient de deux grandeurs** de natures différentes donne **une nouvelle grandeur** appelée **grandeur quotient**.

$$\text{Vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{durée}}$$

Exemple : Calculer **la vitesse** d'un TGV parcourant **640 km** en **2 h 30 min**.

**2 h 30 min = 2,5 h** (voir **1.** ci-dessus)

$$V = \frac{640}{2,5} = \boxed{256 \text{ km.h}^{-1}}$$

Remarque : **La vitesse** est en **km.h$^{-1}$** car **la distance** est en **km** et **la durée** en **h**.

# Comment travailler avec des fonctions ?

## 1. Définir une fonction

**Programme de calcul :**

- Choisir **un nombre** ;
- **Doubler ce nombre** ;
- **Soustraire le carré du nombre choisi au résultat obtenu.**

**Quel nombre** obtient-on si on choisit **le nombre 3** au départ ?

- **Nombre choisi** au départ : **3**
- $3 \times 2 = 6$
- $6 - 3^2 = 6 - 9 = \boxed{-3}$ ← **Nombre obtenu**

**Une fonction f** est un **procédé de calcul** qui à **un nombre de départ**, par exemple **3**, fait correspondre **le nombre obtenu** à la fin du programme de calcul, c'est à dire ici : **-3**

On note : $f : 3 \longmapsto -3$

ou bien $f(3) = -3$

**antécédent** **image**

## 2. Calculer une image

**Programme de calcul :**

- Choisir **un nombre** ;
- **Doubler ce nombre** ;
- **Soustraire le carré du nombre choisi au résultat obtenu.**

**Quel nombre** obtient-on si on choisit **le nombre 1** au départ ?

- **Nombre choisi** au départ : **1**
- $2 \times 2 = 4$
- $4 - 2^2 = 4 - 4 = \boxed{0}$ ← **Nombre obtenu**

Soit $f : x \longmapsto 2x - x^2$

Calculer **l'image** de **2** par **f** (ou calculer **f (2)**, c'est pareil).

On remplace $x$ par **2** :

$f(2) = 2 \times 2 - 2^2$

$= 4 - 4$

$= \boxed{0}$

**L'image** de **2** par **f** est **0**.

## 3. Compléter un tableau de valeurs

Compléter le **tableau de valeurs** de **la fonction f** définie par :

$f(x) = 2x - x^2$

Dans la 1ère ligne du tableau, on donne **les antécédents**.
Dans la 2ème ligne du tableau, on calcule **les images des nombres donnés.**

**Antécédent : nombre de départ**

Exemple : $f(2) = 0$

| $x$ | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -24 | -15 | -8 | -3 | 0 | 1 | 0 | -3 | -8 |

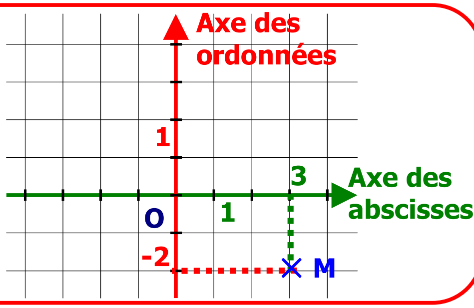
**Image : nombre d'arrivée**

# Comment tracer et utiliser la représentation graphique d'une fonction ?

## 1. Placer un point et lire ses coordonnées

Placer **le point M** de **coordonnées (3 ; -2)**.

- **Le nombre 3** se place sur **l'axe des abscisses** (axe horizontal) et s'appelle **l'abscisse** de **M**.
- **Le nombre -2** se place sur **l'axe des ordonnées** (axe vertical) et s'appelle **l'ordonnée** de **M**.




## 2. Représentation graphique

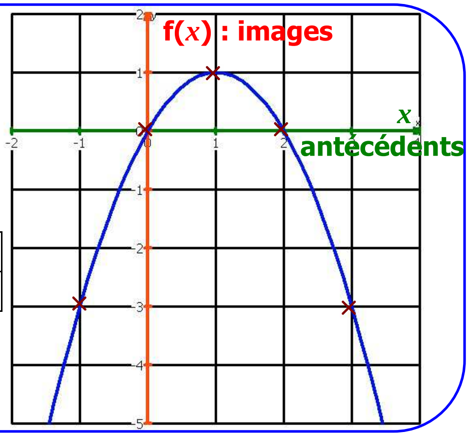
Représenter graphiquement **la fonction f** définie par :

**$f(x) = 2x - x^2$**

On fait **un tableau de valeurs en choisissant plusieurs valeurs quelconques pour $x$** et **on calcule $f(x)$**.

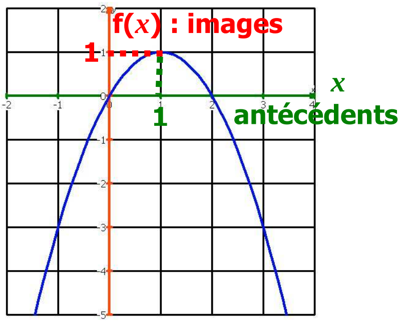
| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -3 | 0 | 1 | 0 | -3 |

Il reste à **placer les points** de coordonnées **(-1;-3)** ; **(0;0)** ; **(1;1)** etc…
puis à **tracer la courbe** à main levée.




## 3. Image graphiquement

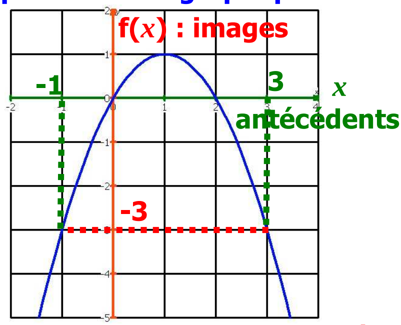
Trouver **l'image** de **1** avec **la représentation graphique de f.**




On part de **1** sur **l'axe des abscisses**, on va jusqu'à **la courbe**, et on obtient **1** sur **l'axe des ordonnées**.
**L'image** de **1** par **f** est **1**.

## 4. Antécédent(s) graphiquement

Trouver **les antécédents** de **-3** avec **la représentation graphique de f.**




On part de **-3** sur **l'axe des ordonnées**, on va jusqu'à **la courbe**, et on obtient **-1** et **3** sur **l'axe des abscisses**.
**Les antécédents** de **-3** sont **–1** et **3**.

# Comment travailler avec des fonctions affines ?

## 1. Calculer une image

Soit **f** : $x \longmapsto 3x - 4$

Calculer **l'image** de **5** par **f**
(ou calculer **f (5)**, c'est pareil).

On remplace $x$ par **5** :

$$f(5) = 3 \times 5 - 4$$
$$= 15 - 4$$
$$= \boxed{11}$$

**L'image** de **5** par **f** est **11**.

**Programme de calcul :**

- Choisis **un nombre** ;
- **Multiplie ce nombre par 3** ;
- **Soustrais 4 au résultat obtenu.**

**Quel nombre** obtient-on si on choisit **le nombre 5** au départ ?

- **Nombre choisi** au départ : **5**
- $5 \times 3 = 15$
- $15 - 4 = 11$

**Nombre obtenu** : $\boxed{11}$

## 2. Calculer un antécédent

Soit **f** : $x \longmapsto 3x - 4$

Calculer **l'antécédent** de **-7** par **f**.

On doit avoir $3x - 4 = -7$
et il faut calculer $x$ :

$$3x = -7 + 4$$
$$3x = -3$$
$$x = \frac{-3}{3} \qquad x = \boxed{-1}$$

**L'antécédent** de **-7** par **f** est **–1**.

**Programme de calcul :**

- Choisis **un nombre** ;
- **Multiplie ce nombre par 3** ;
- **Soustrais 4 au résultat obtenu.**

**Quel nombre** a-t-on choisi au départ si on obtient **le nombre –7** ?

- **Nombre obtenu : -7**
- $-7 + 4 = -3$
- $-3 \div 3 = -1$

**Nombre choisi** au départ : $\boxed{-1}$

## 3. Calculer le coefficient d'une fonction linéaire

Soit **f une fonction linéaire** telle que **f (2) = 1**.
Déterminer **le coefficient** de **cette fonction linéaire**.

C'est **une fonction linéaire**,
donc $f(x) = ax$

$f(2) = 1$ donc $a \times 2 = 1$

donc $a = \boxed{\frac{1}{2}}$

## 4. Calculer les coefficients d'une fonction affine

Soit **f une fonction affine** telle que **f (2) = 1** et **f (-3) = -11**.
Déterminer **les coefficients** de **cette fonction affine**.

C'est **une fonction affine**,
donc $f(x) = ax + b$

$f(2) = 1$ donc $2a + b = 1$
$f(-3) = -11$ donc $-3a + b = -11$

Il reste à **résoudre ce système pour trouver a et b**.

# Comment tracer et utiliser la représentation graphique d'une fonction affine ?

## 1. Représentation graphique

Représenter graphiquement **la fonction f** définie par **f($x$) = 3$x$ – 4**

On fait **un tableau de valeurs en choisissant 2 valeurs quelconques pour $x$** et **on calcule $y$**.

| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $y$ | -4 | 5 |

Il reste à **placer les points** de coordonnées **(0;-4)** et **(3;5)** puis à **tracer la droite**.

Représenter graphiquement **la fonction f** définie par **f($x$) = 3$x$**

On fait **un tableau de valeurs en choisissant 2 valeurs quelconques pour $x$** et **on calcule $y$**.

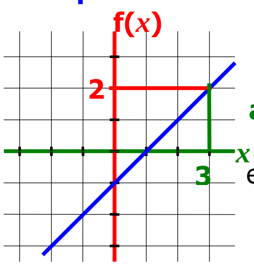
| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $y$ | 0 | 6 |

Il reste à **placer les points** de coordonnées **(0 ; 0)** et **(2 ; 6)** puis à **tracer la droite**.

Remarque : La représentation graphique d'**une fonction linéaire** est une droite qui passe par l'origine.

## 2. Image graphiquement

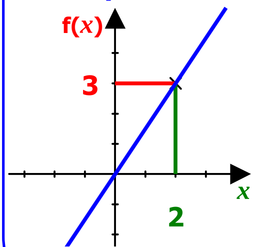
Trouver **l'image** de **3** avec **la représentation graphique de f.**




On part de **3** sur **l'axe des abscisses**, on va jusqu'à **la droite**, et on obtient **2** sur **l'axe des ordonnées**.

**L'image** de **3** par **f** est **2**.

Trouver **l'image** de **2** avec **la représentation graphique de f.**

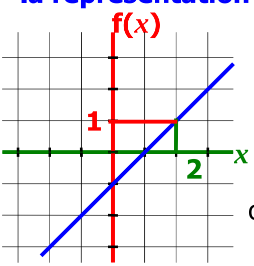



On part de **2** sur **l'axe des abscisses**, on va jusqu'à **la droite**, et on obtient **3** sur **l'axe des ordonnées**.

**L'image** de **2** par **f** est **3**.

## 3. Antécédent graphiquement

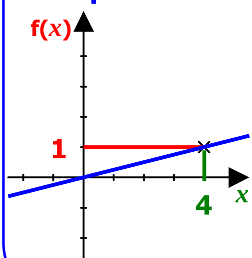
Trouver **l'antécédent** de **1** avec **la représentation graphique de f.**




On part de **1** sur **l'axe des ordonnées**, on va jusqu'à **la droite**, et on obtient **2** sur **l'axe des abscisses**.

**L'antécédent** de **1** par **f** est **2**.

Trouver **l'antécédent** de **1** avec **la représentation graphique de f.**



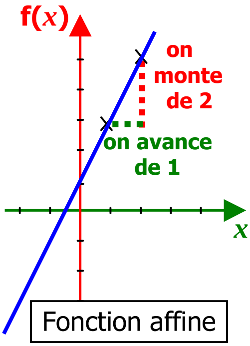

On part de **1** sur **l'axe des ordonnées**, on va jusqu'à **la droite**, et on obtient **4** sur **l'axe des abscisses**.

**L'antécédent** de **1** par **f** est **4**.

## 4. Coefficients graphiquement (pas obligatoire en $3^{ème}$)

### ☞ Coefficient directeur d'une droite

Trouver **le coefficient a** de **f** avec **sa représentation graphique**.



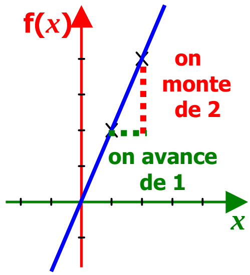

Fonction affine

*On part d'**un point** sur la **représentation graphique** de **f**, **on avance de 1 unité sur l'axe des abscisses**, et **on monte de 2 unités sur l'axe des ordonnées**.*

**Le coefficient a** de **f** est $\boxed{2}$.

Remarque : **Le coefficient a** s'appelle **le coefficient directeur** ou **la pente** de **la droite**.

Trouver **le coefficient a** de **f** avec **sa représentation graphique**.




Fonction linéaire

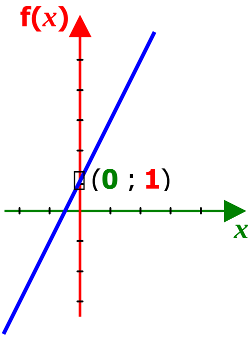
*On part d'**un point** sur la **représentation graphique** de **f**, **on avance de 1 unité sur l'axe des abscisses**, et **on monte de 2 unités sur l'axe des ordonnées**.*

**Le coefficient a** de **f** est $\boxed{2}$.

Remarque : **Le coefficient a** s'appelle **le coefficient directeur** ou **la pente** de **la droite**.

### ☞ Ordonnée à l'origine d'une droite

Trouver **le coefficient b** de **f** avec **sa représentation graphique**.




*On lit l'**ordonnée du point** de **la représentation graphique** de **f** qui a pour **abscisse 0** : c'est **1** .*

**Le coefficient b** de **f** est $\boxed{1}$.

Remarque : **Le coefficient b** s'appelle **l'ordonnée à l'origine** de **la droite**.

**Avertissement :**

☞ Il **n'est pas indispensable en $3^{ème}$** (pour le brevet) de savoir trouver les coefficients d'une fonction par la méthode graphique.

☞ En revanche, pour les élèves qui iront **en $2^{nde}$**, **il est important** de savoir trouver les coefficients d'une fonction à partir de sa représentation graphique.

# Comment résoudre un problème avec des fonctions ?

## Enoncé

Dans un magasin, une cartouche d'encre coûte 15 €. Sur un site Internet, cette cartouche coûte 10 €, avec des frais de livraison fixes de 40 €, quel que soit le nombre de cartouches.

**1.** Reproduire et compléter ce tableau :

| Nombre de cartouches | 2 | 5 | 11 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| Prix magasin | | 75 | | |
| Prix Internet | | 90 | | |

**2.** On note $x$ le nombre de cartouches.

**a.** On note $P_A$ le prix à payer pour l'achat de $x$ cartouches en magasin. Exprimer $P_A$ en fonction de $x$.

**b.** On note $P_B$ le prix à payer, en comptant la livraison, pour l'achat de $x$ cartouches par Internet. Exprimer $P_B$ en fonction de $x$.

**3.** Dans un repère orthogonal, tracer les droites $d$ et $d'$ définies par :

$d$ représente la fonction : $x \longmapsto 15x$

$d'$ représente la fonction : $x \longmapsto 10x + 40$

**4.** En utilisant le graphique :

**a.** Déterminer le prix le plus avantageux pour l'achat de 6 cartouches.

**b.** Sonia dispose de 80 euros pour acheter des cartouches. Est-il plus avantageux pour elle d'acheter des cartouches en magasin ou sur Internet ?

**5.** A partir de quel nombre de cartouches le prix sur Internet est-il inférieur ou égal à celui du magasin ? Expliquer votre réponse.

## Corrigé

**1.**

| Nombre de cartouches | 2 | 5 | 11 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| **Prix magasin** | **30** | 75 | **165** | **210** |
| **Prix Internet** | **60** | 90 | **150** | **180** |

**2.** **a.** $P_A = 15x$ **b.** $P_B = 10x + 40$

**3.**

| $x$ | 0 | 5 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 75 |

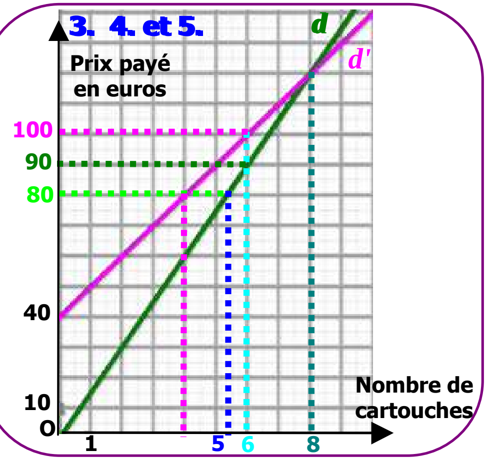
$d$ passe par les points $(0 ; 0)$ et $(5 ; 75)$.

C'est la représentation du prix $P_A$.

| $x$ | 0 | 5 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 40 | 90 |

$d'$ passe par les points $(0 ; 40)$ et $(5 ; 90)$.

C'est la représentation du prix $P_B$.




**4. a.** Il est plus avantageux d'acheter les **6 cartouches** **en magasin** (**90 € en magasin** et **100 € sur Internet**).

**b.** Avec **80 €,** on peut avoir **4 cartouches sur Internet** et **5 en magasin** : il vaut mieux encore les acheter **en magasin**.

**5.** Pour **plus de 8 cartouches**, c'est plus avantageux **sur Internet**. (la **droite $d'$** passe "**en dessous**" de $d$)

## Comment calculer des effectifs et des fréquences ?

### 1. Effectifs

**Répartition des mentions au brevet :**

| Mention | Sans | AB | B | TB |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 20 | 22 | 18 | 14 |
| Effectif cumulé | 20 | 42 | 60 | 74 |

L'**effectif** est **le nombre d'élèves** dans **chaque catégorie.**

L'**effectif cumulé** est **la somme des effectifs** jusqu'à la catégorie considérée.

### 2. Fréquences

$$\text{Fréquence} = \frac{\text{Effectif}}{\text{Effectif total}}$$

| Mention | Sans | AB | B | TB | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 20 | 22 | 18 | 14 | 74 |
| Fréquence (en %) | 27 | 30 | 24 | 19 | 100 |
| Fréquence cumulée (en %) | 27 | 57 | 81 | 100 | |

La **fréquence** des élèves ayant la **mention AB** est :

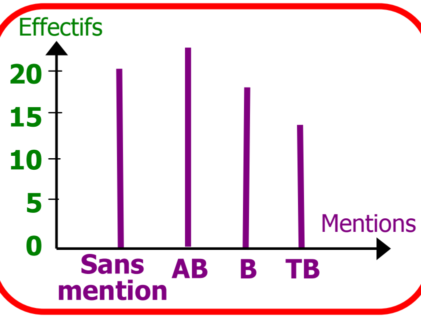
$\frac{22}{74} \approx$ **0,30** soit $\boxed{30\%}$ à 1% près

On donne souvent **la fréquence** sous forme de **pourcentage.**

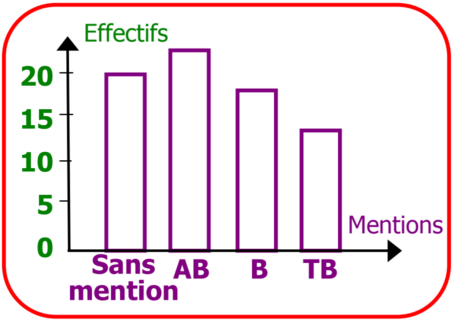
La **fréquence cumulée** est la **somme des fréquences** jusqu'à la catégorie considérée.

## Comment représenter une série statistique ?

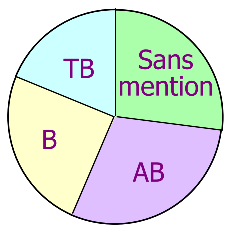
### 1. Diagramme à bâtons




### 2. Histogramme




### 3. Diagramme circulaire




| Mention | Sans | AB | B | TB | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 20 | 22 | 18 | 14 | 74 |
| Angle | $x$ | $y$ | $z$ | $t$ | 360 |

**Les angles sont proportionnels** aux **effectifs** : $74 \times x = 360 \times 20$

$x = \frac{360 \times 20}{74}$ $\quad x \approx \boxed{97°}$ à 1° près

# Comment calculer une moyenne, une médiane, une étendue et les 1$^{er}$ et 3$^{ème}$ quartiles ?

Dans toute la fiche, nous utiliserons ces **notes** obtenues par un groupe d'élèves :
**8 ; 10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 11 ; 13 ; 13 ; 15**.

Remarque : Lorsque ce n'est pas fait dans l'énoncé, il faut **ranger les notes par ordre croissant**, c'est plus facile ensuite.

## 1. Moyenne pondérée

**Notes** des élèves :

| Notes | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 |

**Moyenne pondérée** par **les effectifs** :

$$\frac{8\times1+10\times2+11\times3+13\times2+15\times1}{9} = \frac{8+20+33+26+15}{9} = \frac{102}{9} \approx \boxed{11{,}3} \text{ à 0,1 près}$$

① On multiplie chaque **note** par **l'effectif** correspondant.

② On **additionne les résultats**.

③ On **divise** par **l'effectif total**.

## 2. Regroupement en classes

**[8;10[** → notes **entre 8 et 10** :
**8 compris** et **10 non compris**.

| Classe de notes | [8;10[ | [10;12[ | [12;14[ | [14;16[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectif | 1 | 5 | 2 | 1 |
| Centre de la classe | 9 | 11 | 13 | 15 |

**Moyenne** : $\frac{9\times1+11\times5+13\times2+15\times1}{9} = \frac{9+55+26+15}{9} = \frac{105}{9} \approx \boxed{11{,}7}$ à 0,1 près

① On multiplie chaque **centre de la classe** par **l'effectif** correspondant.

② On **additionne les résultats**.

③ On **divise** par **l'effectif total**.

Remarque : Cette **moyenne** n'est pas exacte, c'est **une approximation**.

## 3. Etendue

L'**étendue** est la **différence** entre la **plus grande** et la **plus petite** valeur.

Les **notes** vont de **8** à **15** donc l'**étendue** est de : **15** - **8** = $\boxed{7}$

Il y a **7 points d'écart** entre la **note la plus élevée** et la note **la plus basse**.

## 4. Médiane

$$\underbrace{8 ; 10 ; 10 ; 11}_{\text{4 notes inférieures à 11}} ; \boxed{11} ; \underbrace{11 ; 13 ; 13 ; 15}_{\text{4 notes supérieures à 11}}$$

La **médiane** est **la valeur** qui partage **la série de notes** en **deux parties** de **même effectif** donc ici la **médiane** est **11**.

Remarque : Il y a **autant** de **valeurs inférieures** que de **valeurs supérieures** à la **médiane**.

## 5. Premier et troisième quartiles

**Au moins le quart des valeurs**

$\underbrace{\overbrace{8 \; ; \; 10 \; ; \; \boxed{10}} \; ; \; 11 \; ; \; 11 \; ; \; 11 \; ; \; \boxed{13}} \; ; \; 13 \; ; \; 15$

**Au moins les trois quarts des valeurs**

Le 1er quartile est **la plus petite valeur $Q_1$** de **la série** telle qu'**au moins le quart des valeurs de la série sont inférieures ou égales** à $Q_1$.

On divise **l'effectif total** par **4** : $\frac{9}{4} = 2{,}25$ donc $Q_1$ est la **3ème** note : $Q_1 = \boxed{10}$

Le 3ème quartile est **la plus petite valeur $Q_3$** de la série telle qu'**au moins les trois quarts des valeurs de la série sont inférieures ou égales** à $Q_3$.

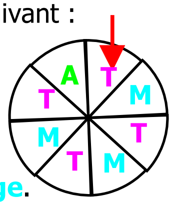
On calcule les $\frac{3}{4}$ de **l'effectif total** : $\frac{3}{4} \times 9 = 6{,}75$

donc $Q_3$ est la **7ème** note : $Q_3 = \boxed{13}$

## Comment calculer des probabilités ?

Dans toute la fiche sur les probabilités, on considère l'exemple suivant :

A un stand, on fait tourner **la roue de loterie** ci-contre composée de **8 secteurs de tailles identiques** :




- si **la flèche** indique **la lettre A**, on gagne **un autocollant** ;
- si **la flèche** indique **la lettre T**, on gagne **un tee-shirt** ;
- si **la flèche** indique **la lettre M**, on gagne **un tour de manège**.

## 1. Probabilité d'un événement

- Calculer **la probabilité** de **l'événement A** : **gagner un autocollant**

  En tournant la roue, **la flèche** a **1** chance sur **8** d'indiquer **la lettre A**.

  Donc **la probabilité** de **l'événement A** est : $p(A) = \boxed{\frac{1}{8}} = \boxed{0{,}125}$

- Calculer **la probabilité** de **l'événement T** : **gagner un tee-shirt**

  En tournant la roue, **la flèche** a **4** chances sur **8** d'indiquer **la lettre T**.

  Donc **la probabilité** de **l'événement A** est : $p(T) = \boxed{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2} = \boxed{0{,}5}$

- Calculer **la probabilité** de **l'événement M** : **gagner un tour de manège**

  En tournant la roue, **la flèche** a **3** chances sur **8** d'indiquer **la lettre M**.

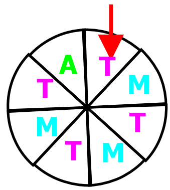
  Donc **la probabilité** de **l'événement M** est : $p(M) = \boxed{\frac{3}{8}} = \boxed{0{,}375}$

## 2. Probabilité d'un événement contraire

Calculer **la probabilité** de **l'événement contraire** de **A** noté **non A** c'est à dire : **ne pas gagner un autocollant**.

**Méthode n°1 : Ne pas gagner un autocollant** revient à gagner **un tee-shirt ou un tour de manège**.

Donc **p(non A) = p(T) + p(M)**




$$p(\text{non } A) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{7}{8}} = \boxed{0{,}875}$$

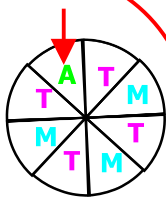
**Méthode n°2 :** $\boxed{p(A) + p(\text{non } A) = 1}$

Donc **p(non A) = 1 - p(A)**

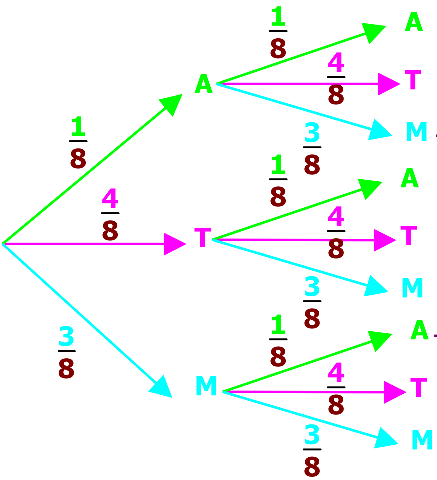
$$p(\text{non } A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}} = \boxed{0{,}875}$$

## 3. Probabilité dans le cas d' une expérience à 2 épreuves

Pierre fait tourner **deux fois la roue de loterie**.
Calculer **la probabilité** qu'il gagne **un autocollant** et **un tour de manège**.




On représente l'ensemble de **toutes les issues possibles** à l'aide de **l'arbre des probabilités** ci-dessous :




**(A ; M) : 1$^{\text{ère}}$ issue favorable**

**(M ; A) : 2$^{\text{ème}}$ issue favorable**

☞ **La probabilité** du résultat auquel conduit **un chemin** est égale **au produit des probabilités** rencontrées **le long de ce chemin**.

Donc $p(A\ ;\ M) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{64}$ et $p(M\ ;\ A) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{64}$

Donc **la probabilité** que Pierre gagne **un autocollant** et **un tour de manège** est égale à : $\frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \boxed{\frac{6}{64}} = \boxed{0{,}09375}$

# INDEX

**$3^{ème}$ …  Nom :  Prénom :**

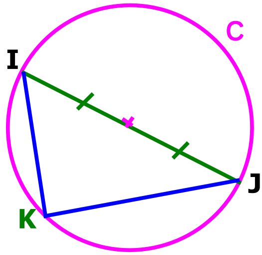
## Sommaire : GEOMETRIE

Pages

## Comment rédiger une démonstration ?

Exemple :

**Soit C un cercle de diamètre [IJ].**
**Soit K un point de ce cercle.**
**Démontrer** que **le triangle IJK est rectangle**.




### 1. En écrivant la propriété

***On écrit** les hypothèses :* **[IJ] est un diamètre du cercle C.** **K est un point du cercle C.**

***On écrit** la propriété :* Si **un côté d'un triangle est le diamètre d'un cercle** et **si le 3ème sommet est sur ce cercle** alors **ce triangle est rectangle**.

***On donne** la conclusion :* Donc **le triangle IJK est rectangle en K**.

### 2. Sans écrire la propriété

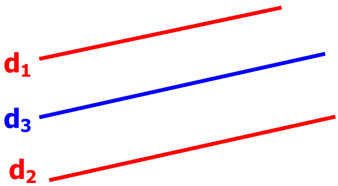
*On **écrit précisément** les hypothèses et on **donne directement** la conclusion **sans réciter** la propriété que l'on utilise :*

**K est un point du cercle de diamètre [IJ]** donc **le triangle IJK est rectangle en K**.

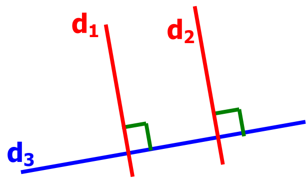
## Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?

### 1. Avec les droites

**$P_1$** Si **deux droites sont parallèles à une même troisième** alors **elles sont parallèles entre elles**.

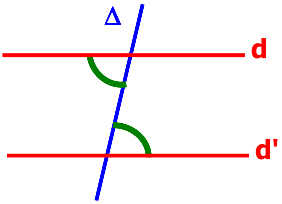



**$P_2$** Si **deux droites sont perpendiculaires à une même troisième** alors **elles sont parallèles entre elles**.

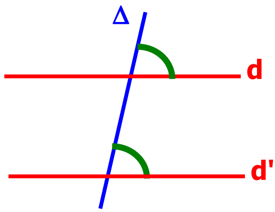


## 2. Avec les angles

**$P_3$** Si **deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes égaux** alors **elles sont parallèles**.

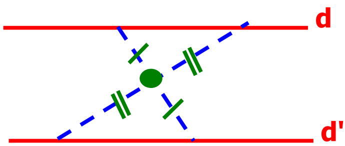



**$P_4$** Si **deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants égaux** alors **elles sont parallèles**.



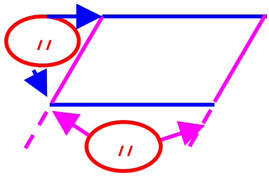

## 3. Avec les transformations

**$P_5$** Si **deux droites sont symétriques par rapport à un point** alors **elles sont parallèles**.



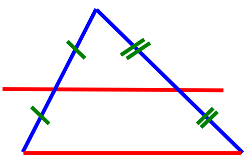

## 4. Avec les quadrilatères

**$P_6$** Si **un quadrilatère est un parallélogramme** (un losange, un rectangle ou un carré) alors **ses côtés opposés sont parallèles**.




## 5. Avec la droite des milieux

**$P_7$** Si dans un triangle **une droite passe par les milieux de deux côtés** alors **elle est parallèle au 3$^{ème}$ côté**.

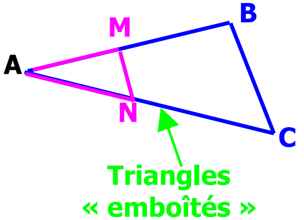


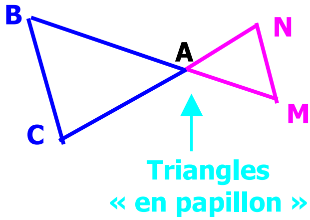
## 6. Avec la réciproque de la propriété de Thalès

**$P_8$** Si dans les triangles **AMN** et **ABC** :

- **A**, **M** et **B** **sont alignés dans le même ordre que** **A**, **N** et **C** ;
- $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

alors **(MN)** et **(BC)** **sont parallèles**.




Exemple : **Démontrer** que **(JK)** et **(ML)** **sont parallèles**.

Dans les triangles **IML** et **IJK** :

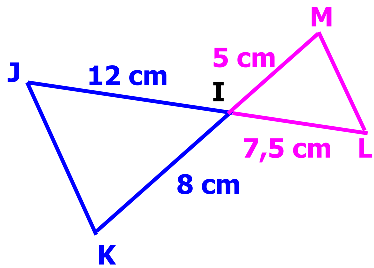
- **J**, **I** et **L** **sont alignés dans le même ordre que K**, **I** et **M**.
- $\dfrac{IM}{IK} = \dfrac{5}{8}$ et $\dfrac{IL}{IJ} = \dfrac{7,5}{12}$

**5** × **12** = **60**

**8** × **7,5** = **60**

Les produits en croix **sont égaux** donc $\dfrac{IM}{IK} = \dfrac{IL}{IJ}$.

**D'après la réciproque de la propriété de Thalès**,
**(JK)** et **(ML)** **sont parallèles**.




**Comment démontrer que deux droites ne sont pas parallèles ?**

Exemple : **Démontrer** que **(UV)** et **(ST)** **ne sont pas parallèles**.

Dans les triangles **RUV** et **RST** :

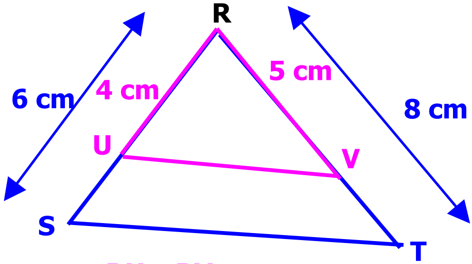
- **R**, **U** et **S** **sont alignés dans le même ordre que** **R**, **V** et **T**.
- $\dfrac{RU}{RS} = \dfrac{4}{6}$ et $\dfrac{RV}{RT} = \dfrac{5}{8}$

**4** × **8** = **32**

**6** × **5** = **30**

Les produits en croix **ne sont pas égaux** donc $\dfrac{RU}{RS} \neq \dfrac{RV}{RT}$.

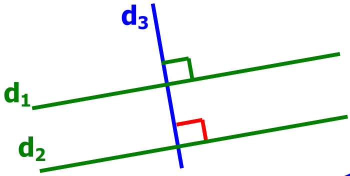
**donc (UV)** et **(ST)** **ne sont pas parallèles**.



# Comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?

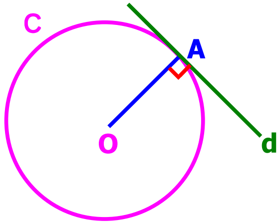
## 1. Avec les droites

**$P_9$** Si **deux droites sont parallèles** et **si une troisième est perpendiculaire à l'une** alors **elle est perpendiculaire à l'autre**.



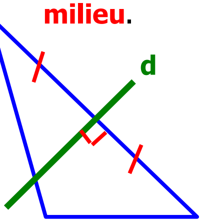

## 2. Avec la tangente à un cercle

**$P_{10}$** Si **une droite est tangente à un cercle** alors **elle est perpendiculaire au rayon au point de contact**.

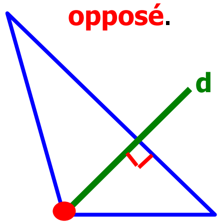



## 3. Avec les droites remarquables du triangle

**$P_{11}$** Si **une droite est la médiatrice d'un segment** alors **elle est perpendiculaire à ce segment et elle passe par son milieu**.

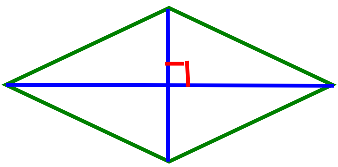



**$P_{12}$** Si dans un triangle **une droite est une hauteur** alors **elle passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé**.

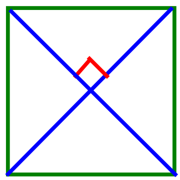



## 4. Avec les quadrilatères

**$P_{13}$** Si **un quadrilatère est un losange** alors **ses diagonales sont ses axes de symétrie et sont perpendiculaires**.



**$P_{14}$** Si **un quadrilatère est un carré** alors **ses diagonales sont perpendiculaires**.

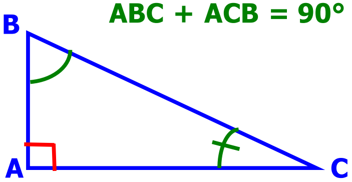


# Comment démontrer qu'un triangle est rectangle ?

## 1. Avec les angles

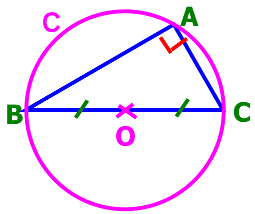
**$P_{15}$** Si **un triangle a deux angles complémentaires** alors **il est rectangle**.

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$$



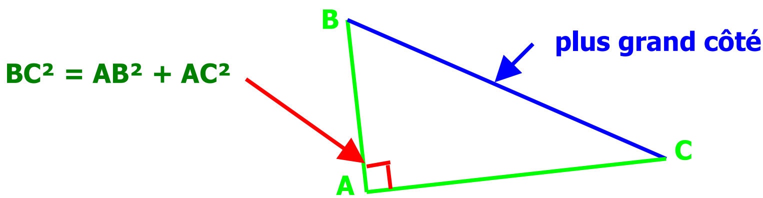

## 2. Avec un cercle

**$P_{16}$** Si **un côté d'un triangle est le diamètre d'un cercle** et si **le 3ème sommet est sur ce cercle** alors **ce triangle est rectangle**.



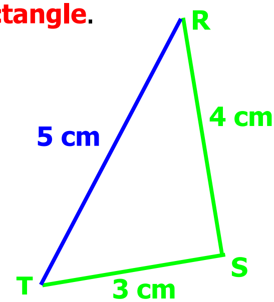

## 3. Avec la réciproque du théorème de Pythagore

**$P_{17}$** Si dans un triangle ABC, **$BC^2 = AB^2 + AC^2$**
**(BC étant la longueur du plus grand côté)**
alors **ce triangle est rectangle en A**.




Exemple : **Démontrer** que **le triangle RST est rectangle**.

Dans le triangle RST, **[RT] est le plus long côté**.




| | |
|---|---|
| $RT^2 = 5^2$ | $ST^2 + SR^2 = 3^2 + 4^2$ |
| $RT^2 = 25$ | $ST^2 + SR^2 = 9 + 16$ |
| | $ST^2 + SR^2 = 25$ |

$$RT^2 = ST^2 + SR^2$$

**D'après la réciproque du théorème de Pythagore,**
**le triangle RST est rectangle en S.**

## Comment démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle ?

Exemple : **Démontrer** que **le triangle EFG n'est pas rectangle**.

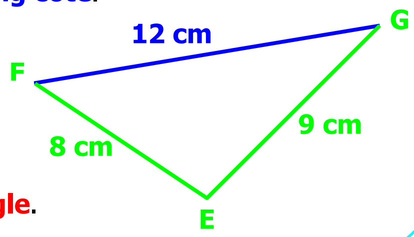
Dans le triangle EFG, **[FG] est le plus long côté**.

$FG^2 = 12^2$
$FG^2 = 144$

$EF^2 + EG^2 = 8^2 + 9^2$
$EF^2 + EG^2 = 64 + 81$
$EF^2 + EG^2 = 145$

$FG^2 \neq EF^2 + EG^2$

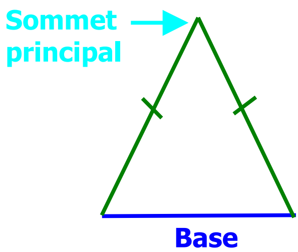
**donc le triangle EFG n'est pas rectangle**.




## Comment démontrer qu'un triangle est isocèle ?

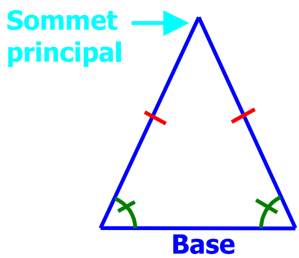
### 1. Avec les côtés

**$P_{18}$** Si **un triangle a deux côtés égaux** alors **il est isocèle**.




### 2. Avec les angles

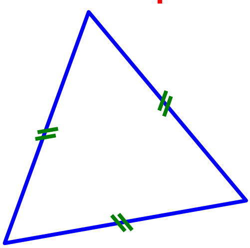
**$P_{19}$** Si **un triangle a deux angles égaux** alors **il est isocèle**.




## Comment démontrer qu'un triangle est équilatéral ?

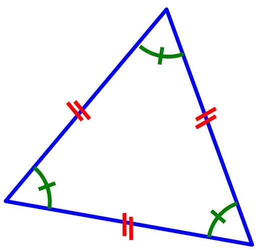
### 1. Avec les côtés

**$P_{20}$** Si **un triangle a trois côtés égaux** alors **il est équilatéral**.



### 2. Avec les angles

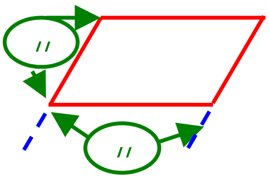
**$P_{21}$** Si **un triangle a trois angles égaux** alors **il est équilatéral**.



**Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?**

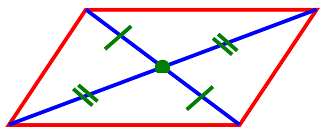
## 1. Avec la définition

**P$_{22}$** Si **un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles** alors **c'est un parallélogramme**.



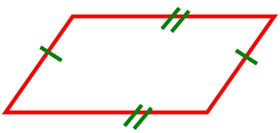

## 2. Avec les diagonales

**P$_{23}$** Si **un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu** alors **c'est un parallélogramme**.

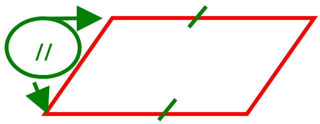


## 3. Avec les côtés opposés

**P$_{24}$** Si **un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur** alors **c'est un parallélogramme**.

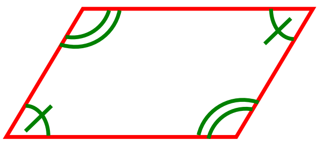


**P$_{25}$** Si **un quadrilatère** (non croisé) **a 2 côtés opposés parallèles et de même longueur** alors **c'est un parallélogramme**.



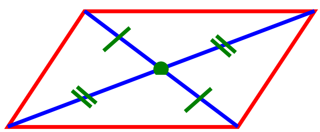

## 4. Avec les angles

**P$_{26}$** Si **un quadrilatère a ses angles opposés égaux** alors **c'est un parallélogramme**.



## 5. Avec un centre de symétrie

**P$_{27}$** Si **un quadrilatère a un centre de symétrie** alors **c'est un parallélogramme**.



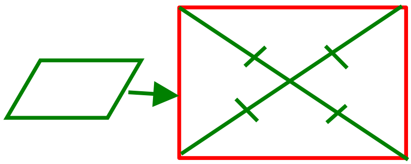
## Comment démontrer qu'un … est un rectangle ?

### 1. Avec la définition

**$P_{28}$** Si **un quadrilatère a trois angles droits** alors **c'est un rectangle**.

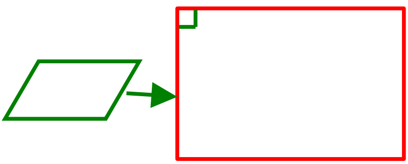
### 2. Avec les diagonales

**$P_{29}$** Si **un parallélogramme a ses diagonales de même longueur** alors **c'est un rectangle**.



### 3. Avec un angle droit

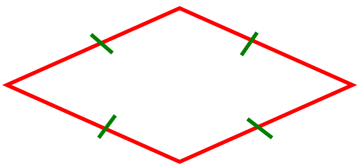
**$P_{30}$** Si **un parallélogramme a un angle droit** alors **c'est un rectangle**.



## Comment démontrer qu'un … est un losange ?

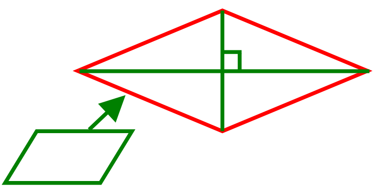
### 1. Avec la définition

**$P_{31}$** Si **un quadrilatère a quatre côtés de même longueur** alors **c'est un losange**.



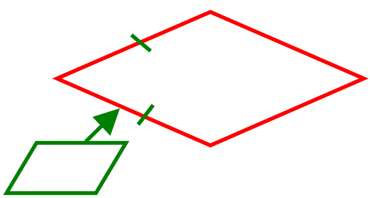
### 2. Avec les diagonales

**$P_{32}$** Si **un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires** alors **c'est un losange**.



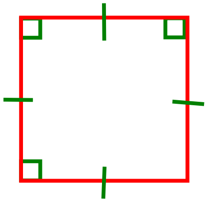
### 3. Avec les côtés

**$P_{33}$** Si **un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur** alors **c'est un losange**.



## Comment démontrer qu'un quadrilatère est un carré ?

**P$_{34}$** Si **un quadrilatère est à la fois un rectangle et un losange** alors **c'est un carré**.

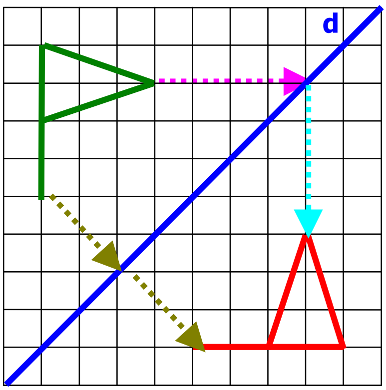


Remarque :
Cela revient à démontrer que le quadrilatère a 3 angles droits et 4 côtés de même longueur.

## Comment construire l'image d'une figure par une transformation ?

### 1. Par une symétrie axiale

**P$_{35}$**




Construire **l'image du drapeau vert** par **la symétrie d'axe d**.

Avec les lignes **horizontales** et **verticales** :
**4 carreaux vers la droite** **jusqu'à d**
puis **4 carreaux vers le bas**.

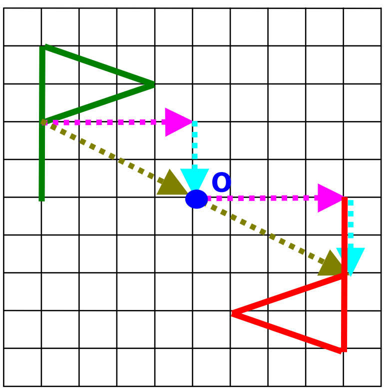
**ou**

Avec **les diagonales** :
**diagonale de 2 carreaux sur 2**
**jusqu'à d** et **on recommence**.

☞ ***Symétrie axiale*** ⟶ ***pliage***

### 2. Par une symétrie centrale

**P$_{36}$**




Construire **l'image du drapeau vert** par **la symétrie de centre O**.

Avec les lignes **horizontales** et **verticales** :
**4 carreaux vers la droite** et **2 carreaux vers le bas** **jusqu'à O** et **on recommence**.

**ou**

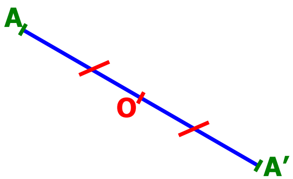
Avec **les diagonales** :
**diagonale de 4 carreaux sur 2**
**jusqu'à O** et **on recommence**.

☞ ***Symétrie centrale*** ⟶ ***demi-tour***

# Comment démontrer qu'un point est le milieu d'un segment ?

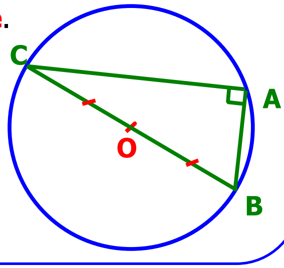
## 1. Avec la symétrie centrale

**P₃₇** Si **deux points A et A' sont symétriques par rapport à O** alors **O est le milieu de [AA']**.



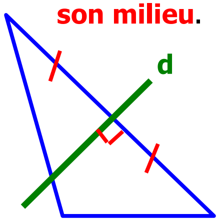

## 2. Avec le centre d'un cercle

**$P_{38}$** Si **un triangle est rectangle** alors **le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse**.

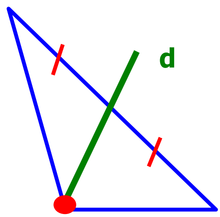



## 3. Avec les droites remarquables du triangle

**$P_{39}$** Si **une droite est la médiatrice d'un segment** alors **elle est perpendiculaire à ce segment et elle passe par son milieu**.

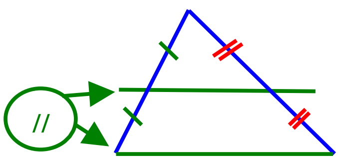



**$P_{40}$** Si dans un triangle **une droite est une médiane** alors **elle passe par un sommet et par le milieu du côté opposé**.



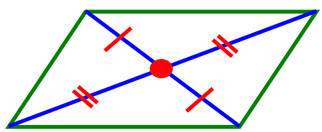

## 4. Avec un milieu et une parallèle

**$P_{41}$** Si dans un triangle **une droite passe par le milieu d'un côté** et si **elle est parallèle à un $2^{ème}$ côté** alors **elle passe par le milieu du $3^{ème}$ côté**.




## 5. Avec un parallélogramme

**$P_{42}$** Si **un quadrilatère est un parallélogramme** alors **ses diagonales se coupent en leur milieu**.



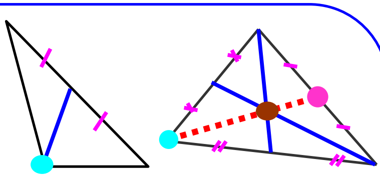
# Comment démontrer qu'une droite est médiane, médiatrice bissectrice ou hauteur ?

## 1. Médiane

## 2. Médiatrice

Une **médiane** et une **médiatrice** passent par un **milieu** : leur nom contient "**média**"

P43



- On montre qu'elle passe par un **sommet** et par le **milieu** d'un côté.

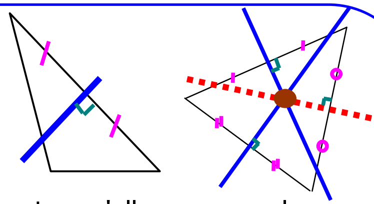
**ou**

- On montre qu'elle passe par le **milieu** d'un côté et par le **point d'intersection** de **2 médianes**.

**ou**

- On montre qu'elle passe par un **sommet** et par le **point d'intersection** de **2 médianes**.

P44



- On montre qu'elle passe par le **milieu** d'un côté et qu'elle est **perpendiculaire** à ce côté.

**ou**

- On montre qu'elle passe par le **milieu** d'un côté et par le **point d'intersection** de **2 médiatrices**.

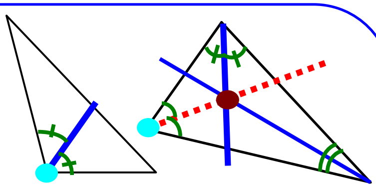
**ou**

- On montre qu'elle est **perpendiculaire** à un côté et qu'elle passe par le **point d'intersection** de **2 médiatrices**.

## 3. Bissectrice d'un angle

Une **bissectrice** partage un angle en **2** angles égaux : son nom contient "**bi**" qui veut dire **deux**.

P45



- On montre qu'elle passe par un **sommet** et qu'elle partage l'angle en **2 angles égaux**.

**ou**

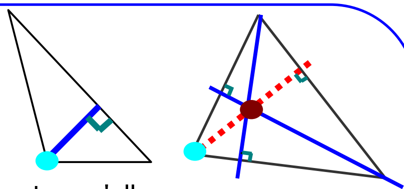
- On montre qu'elle passe par un **sommet** et par le **point d'intersection** de **2 bissectrices**.

**Pas de 3ème possibilité !**

## 4. Hauteur

Une **hauteur** : c'est l'exception, pas de moyen mnémotechnique !

P46



- On montre qu'elle passe par un **sommet** et qu'elle est **perpendiculaire** au côté opposé.

**ou**

- On montre qu'elle passe par un **sommet** et par le **point d'intersection** de **2 hauteurs**.

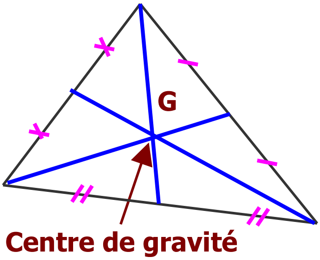
**ou**

- On montre qu'elle est **perpendiculaire** à un côté et qu'elle passe par le **point d'intersection** de **2 hauteurs**.

# Comment montrer qu'un point est un point particulier d'un triangle ?

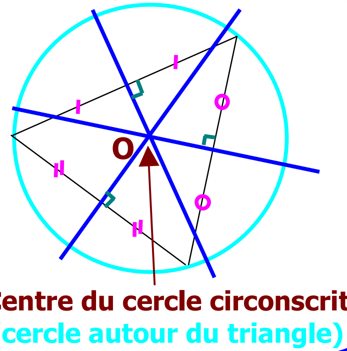
## 1. Centre de gravité

**$P_{47}$** On montre que c'est **le point d'intersection** de **2 médianes**.



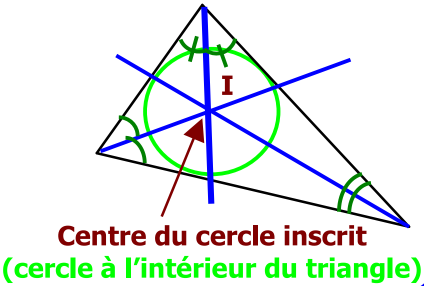

## 2. Centre du cercle circonscrit

**$P_{48}$** On montre que c'est **le point d'intersection** de **2 médiatrices**.



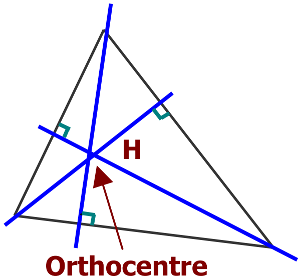

## 3. Centre du cercle inscrit

**$P_{49}$** On montre que c'est **le point d'intersection** de **2 bissectrices**.




## 4. Orthocentre

**$P_{50}$** On montre que c'est **le point d'intersection** de **2 hauteurs**.



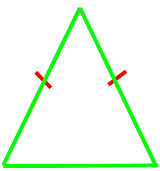

# Comment démontrer que deux segments ont la même longueur ?

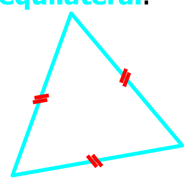
## 1. Avec un triangle

**$P_{51}$**On montre qu'**ils sont des côtés** d'un **triangle isocèle**.

**ou**

On montre qu'**ils sont les côtés** d'un **triangle équilatéral**.



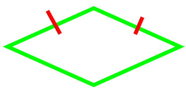


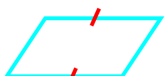
## 2. Avec un quadrilatère

**$P_{52}$** On montre qu'**ils sont des côtés consécutifs** d'un **cerf-volant**, d'un **losange** ou d'un **carré**.

**ou**

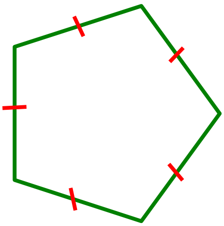
On montre qu'**ils sont des côtés opposés** d'un **parallélogramme**, d'un **rectangle**, d'un **losange** ou d'un **carré**.





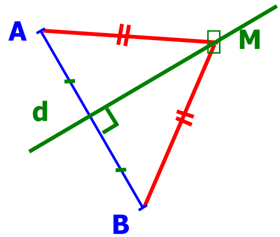
## 3. Avec un polygone régulier

**P$_{53}$** Si **un polygone est régulier** alors **tous ses côtés sont de même longueur**.



## 4. Avec une médiatrice

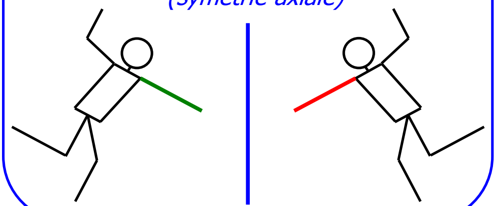
**P$_{54}$** Si **un point appartient à la médiatrice d'un segment** alors **il est à la même distance des extrémités du segment**.




## 5. Avec une transformation

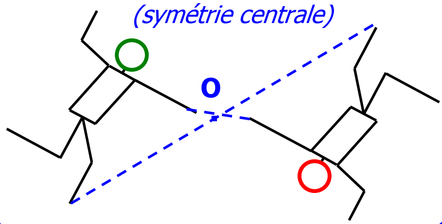
**P$_{55}$ L'image d'un segment** par **une transformation** (symétrie axiale ou centrale) est **un segment de même longueur**.

*(symétrie axiale)*



**P$_{56}$ L'image d'un cercle** par **une transformation** (symétrie axiale ou centrale) est **un cercle de même rayon**.

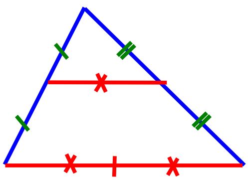
*(symétrie centrale)*




## Comment calculer la longueur d'un segment ?

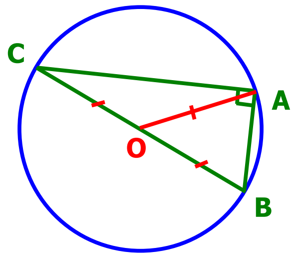
## 1. Avec 2 milieux

**P$_{57}$** Si dans un triangle **un segment a pour extrémités les milieux de 2 côtés** alors **il a pour longueur la moitié du 3$^{ème}$ côté.**



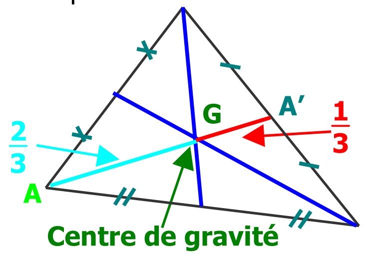
## 2. Avec une médiane

**P$_{58}$** Si **un triangle est rectangle** alors **la médiane issue de l'angle droit a pour longueur la moitié de l'hypoténuse**.



## 3. Avec un centre de gravité

**P$_{59}$ Le centre de gravité est situé au 1/3 de chaque médiane** à partir du **milieu** d'un côté.




Exemple : Calculer **GA'** et **GA** sachant que **AA' = 6 cm**.

**G** est situé au $\frac{1}{3}$ de **AA'** à partir de **A'** :

$$GA' = \frac{1}{3} \times 6 = \frac{1 \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{3}} = \boxed{2\text{ cm}}$$

**G** est situé aux $\frac{2}{3}$ de **AA'** à partir de **A** :

$$GA = \frac{2}{3} \times 6 = \frac{2 \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{3}} = \boxed{4\text{ cm}}$$

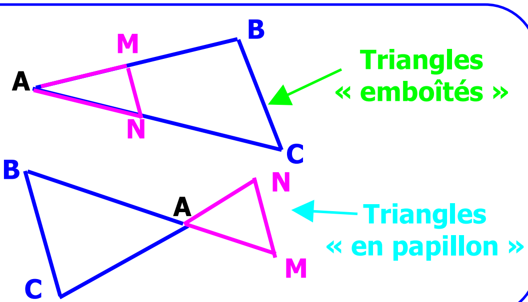
## 4. Avec la propriété de Thalès

**P$_{60}$**

Si dans les triangles **AMN** et **ABC** :

- **A**, **M** et **B sont alignés** ;
- **A**, **N** et **C sont alignés** ;
- **(MN)** et **(BC) sont parallèles.**

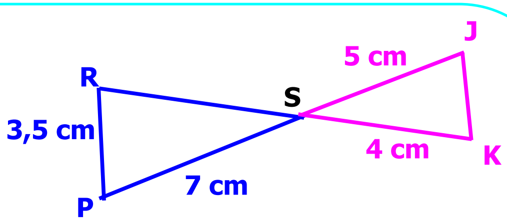
alors $\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}}$




Exemple :

**SJ = 5 cm** ; **SK = 4 cm** ;
**SP = 7 cm** ; **RP = 3,5 cm** ;
**(JK)** et **(RP) sont parallèles.**

Calculer **JK** et **RS**.




Dans les triangles **SJK** et **SRP** :

- **J**, **S** et **P sont alignés** ;
- **K**, **S** et **R sont alignés** ;
- **(JK)** et **(RP) sont parallèles.**

alors $\boxed{\frac{SJ}{SP} = \frac{SK}{SR} = \frac{JK}{RP}}$ soit encore $\boxed{\frac{5}{7} = \frac{4}{SR} = \frac{JK}{3,5}}$

Calcul de **JK** :

$$\frac{5}{7} = \frac{JK}{3,5}$$

donc $JK = \frac{5 \times 3,5}{7} = \boxed{2,5\text{ cm}}$

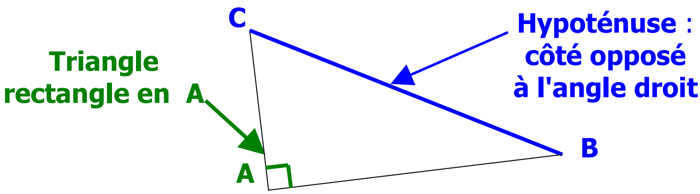
Calcul de **RS** :

$$\frac{5}{7} = \frac{4}{SR}$$

donc $RS = \frac{4 \times 7}{5} = \boxed{5,6\text{ cm}}$

## 5. Avec le théorème de Pythagore

**$P_{61}$** Si **ABC est un triangle rectangle en A** alors **$BC^2 = AB^2 + AC^2$**.



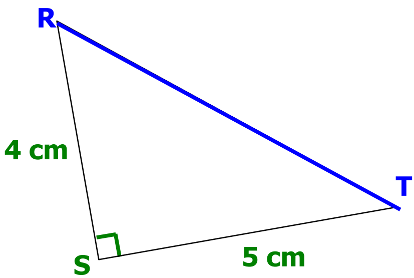

Remarque : On a aussi **$AB^2 = BC^2 - AC^2$** et **$AC^2 = BC^2 - AB^2$**

**Vérifications à envisager** :

- On peut vérifier **en mesurant sur le dessin** (lorsqu'il est fait en vraie grandeur).
- **L'hypoténuse** doit être **plus longue** que **les côtés de l'angle droit**.

Exemple : Calculer la longueur de **l'hypoténuse**

Calculer **RT** (**valeur exacte** et **valeur arrondie à 1 mm près**).



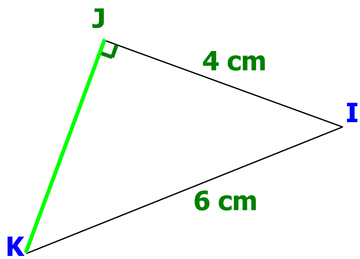

**Dans le triangle RST rectangle en S,**
**d'après le théorème de Pythagore** :
**$RT^2 = SR^2 + ST^2$**
$RT^2 = 4^2 + 5^2$
$RT^2 = 16 + 25$
$RT^2 = 41$

**RT** = $\boxed{\sqrt{41}\text{ cm}}$ **valeur exacte**

**RT** ≈ $\boxed{6{,}4\text{ cm}}$ **valeur arrondie à 1 mm près**

Exemple : Calculer la longueur d'**un côté de l'angle droit**

Calculer **JK** (**valeur exacte** et **valeur arrondie à 1 mm près**).




**Dans le triangle IJK rectangle en J,**
**d'après le théorème de Pythagore** :
**$JK^2 = IK^2 - JI^2$**
$JK^2 = 6^2 - 4^2$
$JK^2 = 36 - 16$
$JK^2 = 20$

**JK** = $\boxed{\sqrt{20}\text{ cm}}$ **valeur exacte**

**JK** ≈ $\boxed{4{,}5\text{ cm}}$ **valeur arrondie à 1 mm près**

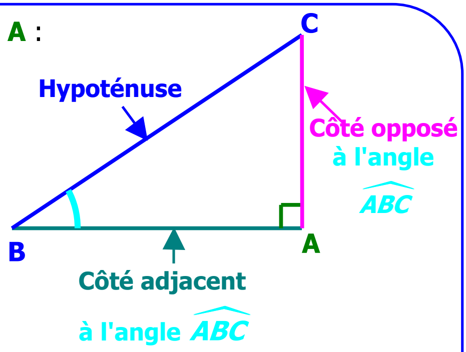
## 6. Avec la trigonométrie : SOHCAHTOA

**$P_{62}$** Dans **le triangle ABC rectangle en A** :

**SOH** $\sin\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$

**CAH** $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$

**TOA** $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$




Remarque : Pour tout angle aigu $\widehat{ABC}$ :

$0 < \sin\widehat{ABC} < 1$ $0 < \cos\widehat{ABC} < 1$ $0 < \tan\widehat{ABC}$

**Penser à régler la calculatrice sur le mode degrés : DEG**

Exemple : Calculer la longueur de **l'hypoténuse**

Calculer **BT** (**valeur exacte** et **valeur arrondie au dixième**).

*On connaît* ***le côté opposé****, on cherche* ***l'hypoténuse*** *donc on utilise* : **SOH**

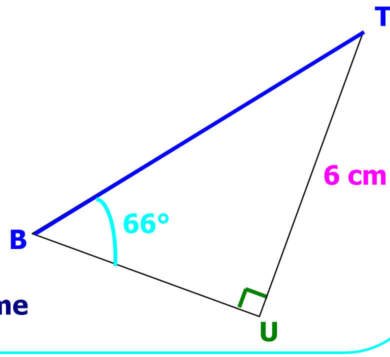
**Dans le triangle BUT rectangle en U** :

$\sin\widehat{UBT} = \dfrac{UT}{BT}$ soit encore $\dfrac{\sin 66°}{1} = \dfrac{6}{BT}$

$BT = \dfrac{6 \times 1}{\sin 66°}$

$BT = \boxed{\dfrac{6}{\sin 66°}\text{ cm}}$ **valeur exacte**

$BT \approx \boxed{6{,}6\text{ cm}}$ **valeur arrondie au dixième**




Exemple : Calculer la longueur d'**un côté de l'angle droit**

Calculer **DE** (**valeur exacte** et **valeur arrondie au dixième**).

*On connaît* ***le côté adjacent****, on cherche* ***le côté opposé*** *donc on utilise* : **TOA**

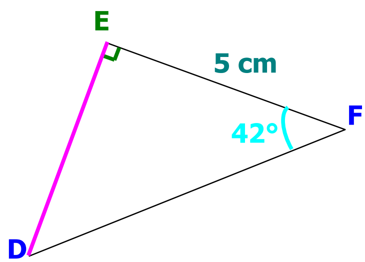
**Dans le triangle DEF rectangle en E** :

$\tan\widehat{EFD} = \dfrac{DE}{EF}$ soit encore $\dfrac{\tan 42°}{1} = \dfrac{DE}{5}$

$DE = \dfrac{5 \times \tan 42°}{1}$

$DE = \boxed{5 \times \tan 42°\text{ cm}}$ **valeur exacte**

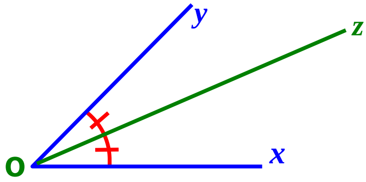
$DE \approx \boxed{4{,}5\text{ cm}}$ **valeur arrondie au dixième**



# Comment démontrer que deux angles ont la même mesure ?

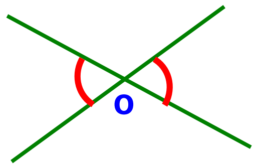
## 1. Avec une bissectrice

**P$_{63}$** Si **une droite ou une demi-droite est la bissectrice d'un angle** alors **elle partage cet angle en deux angles égaux**.



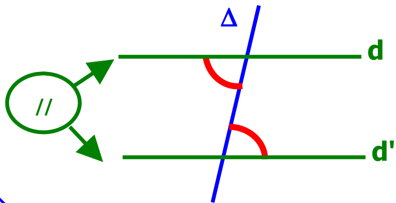

## 2. Avec des angles opposés par le sommet

**P$_{64}$** Si **deux angles sont opposés par le sommet** alors **ils sont égaux**.

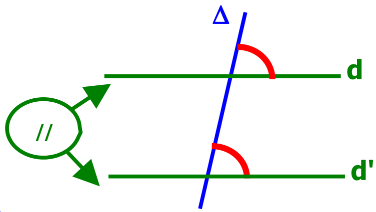



## 3. Avec des droites parallèles

**P$_{65}$** Si **deux droites parallèles et une sécante forment des angles alternes-internes** alors **ils sont égaux**.

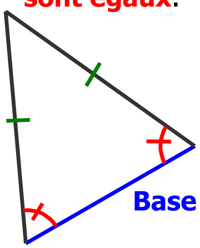



**P$_{66}$** Si **deux droites parallèles et une sécante forment des angles correspondants** alors **ils sont égaux**.

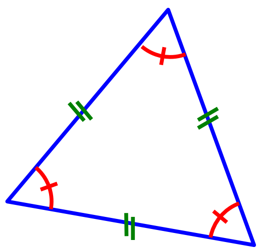



## 4. Avec des triangles particuliers

**P$_{67}$** Si **un triangle est isocèle** alors **ses angles à la base sont égaux**.

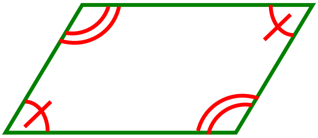



**P$_{68}$** Si **un triangle est équilatéral** alors **ses trois angles sont égaux à 60°**.



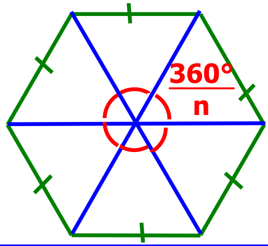
## 5. Avec un parallélogramme

**P$_{69}$** Si **un quadrilatère est un parallélogramme** (un rectangle, un losange ou un carré) alors **ses angles opposés sont égaux**.



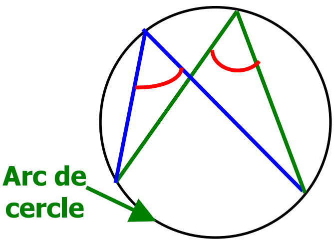
## 6. Avec un polygone régulier

**P$_{70}$** Si **un polygone à n côtés est régulier** alors **tous ses angles au centre sont égaux à $\frac{360°}{n}$**.




## 7. Avec un cercle

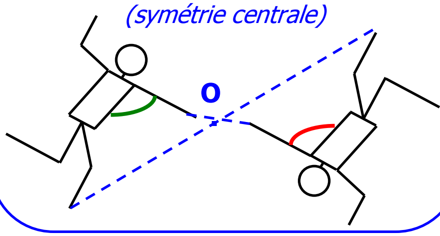
**P$_{71}$** Si **deux angles inscrits interceptent le même arc de cercle** alors **ils sont égaux**.




## 8. Avec une transformation

**P$_{72}$** **L'image d'un angle** par **une transformation** (symétrie axiale ou centrale) est **un angle de même mesure**.

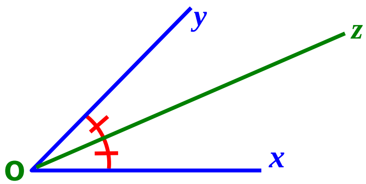
*(symétrie centrale)*




## Comment calculer la mesure d'un angle ?

## 1. Avec une bissectrice

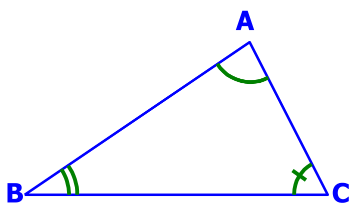
**P$_{73}$** Si **une droite ou une demi-droite est la bissectrice d'un angle** alors **elle partage cet angle en deux angles égaux**.




$$\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \frac{\widehat{xOy}}{2}$$

## 2. Dans un triangle

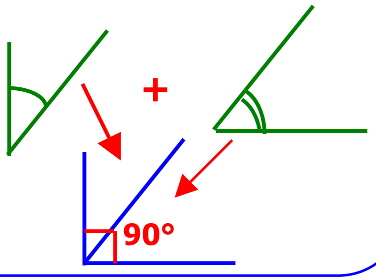
**P$_{74}$** **La somme des angles d'un triangle est égale à 180°**.



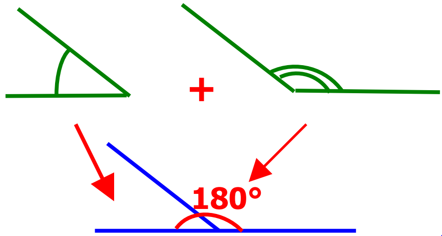

$$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180°$$

## 3. Avec des angles complémentaires ou supplémentaires

**$P_{75}$ Deux angles complémentaires** sont **deux angles** dont **la somme est égale à 90°**.

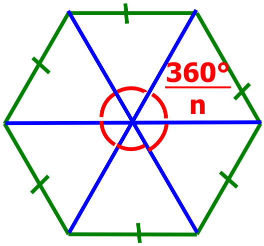



**$P_{76}$ Deux angles supplémentaires** sont **deux angles** dont **la somme est égale à 180°**.




## 4. Dans un polygone régulier

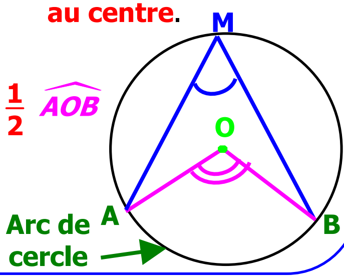
**$P_{77}$** Si **un polygone à n côtés est régulier** alors **tous ses angles au centre sont égaux à $\frac{360°}{n}$**.




## 5. Dans un cercle

**$P_{78}$** Si **un angle inscrit** et **un angle au centre interceptent le même arc de cercle** alors **l'angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre**.

$$\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\ \widehat{AOB}$$

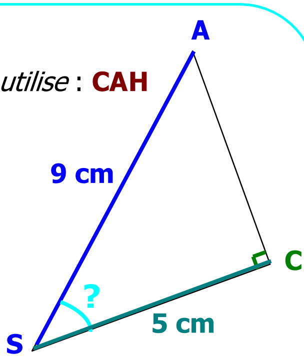



## 6. Avec la trigonométrie : SOHCAHTOA (voir rappel $P_{66}$ page 18)

<u>Exemple</u> : Calculer $\widehat{ASC}$ à **1° près.**

*On connaît **le côté adjacent** et **l'hypoténuse** donc on utilise* : **CAH**

**Dans le triangle SAC rectangle en C** :




$\cos \widehat{ASC} = \dfrac{SC}{SA}$

$\cos \widehat{ASC} = \dfrac{5}{9}$ ← ***Cosinus de l'angle*** *(Nombre entre 0 et 1)*

$\widehat{ASC} \approx \boxed{56°}$ à **1° près.** ← ***Angle aigu*** *(entre 0° et 90°)*

*Pour obtenir **l'angle** à partir **du cosinus**, on utilise **la touche*** **Acs** *ou* **$\cos^{-1}$** *obtenue avec **la touche*** **$2^{nd}$** *ou* **SHIFT**.

# Comment exprimer et calculer un périmètre ?

## 1. Unités de longueur

**$P_{79}$** **Le périmètre d'une figure** s'exprime avec **une unité de longueur**.

**L'unité principale de longueur** est **le mètre** (**m**) ; **1 m = 10 dm**

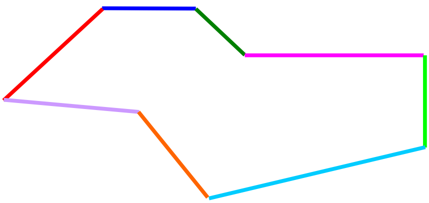
| km | hm | dam | m | dm | cm | mm |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 7 | 9 | 2 | |
| 0 | 0 | 5 | 8 | | | |

Exemple de conversions : **7,92 m = 792 cm** et **58 m = 0,058 km**

Remarque : Pour calculer **un périmètre**, **il faut s'assurer** que **toutes les longueurs de la figure** sont exprimées **dans la même unité**.

## 2. Pour un polygone

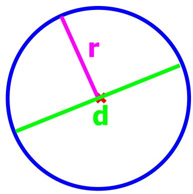
**$P_{80}$** Pour calculer **le périmètre d'un polygone**, **on additionne les longueurs de tous ses côtés**.



## 3. Pour un cercle

**$P_{81}$** $P = \pi \times d$

**ou** $P = 2 \times \pi \times r$




Remarque :

**Valeur exacte** :
On laisse le résultat **en fonction de π**.

**Valeur approchée** :
On calcule en prenant π × **3,14**.

# Comment exprimer et calculer une aire ?

## 1. Unités d'aire

**$P_{82}$** **L'aire d'une figure** s'exprime avec **une unité d'aire**.

**L'unité principale d'aire** est **le mètre carré** (**m²**) ; **1 m² = 100 dm²**

| km² | | hm² | | dam² | | m² | | dm² | | cm² | | mm² | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 4 | 9 | 0 | | | | |
| | | | | | | | | | 0 | 9 | 1 | 3 | |

Exemple de conversions : **4,9 m² = 490 dm²** et **91,3 cm² = 0,913 dm²**

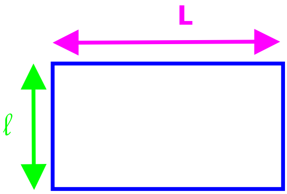
Remarques :

- Pour calculer **une aire**, **il faut s'assurer** que **toutes les longueurs de la figure** sont exprimées **dans la même unité**.
- Si **les longueurs** sont en **m**, **l'aire** est en **m²** etc…

## 2. Pour un rectangle

$P_{83}$

$$\boxed{A = L \times \ell}$$



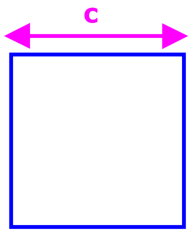

## 3. Pour un carré

$P_{84}$

$$\boxed{A = c \times c}$$

ou

$$\boxed{A = c^2}$$



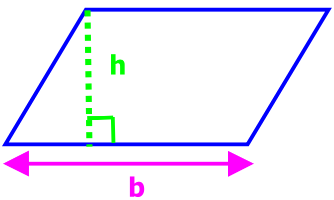

## 4. Pour un parallélogramme

$P_{85}$

$$\boxed{A = \text{base} \times \text{hauteur}}$$

ou

$$\boxed{A = b \times h}$$



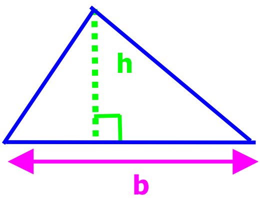

## 5. Pour un triangle

$P_{86}$

$$\boxed{A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}}$$

ou

$$\boxed{A = \frac{b \times h}{2}}$$



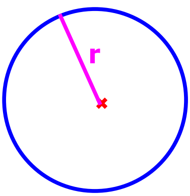

## 6. Pour un disque

$P_{87}$

$$\boxed{A = \pi \times r \times r}$$

ou

$$\boxed{A = \pi \times r^2}$$




Remarque :

**Valeur exacte** :
On laisse le résultat **en fonction de π**.

**Valeur approchée** :
On calcule en prenant $\pi \times$ **3,14**.

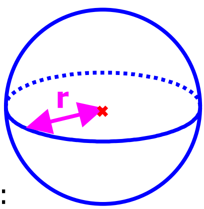
## 7. Pour une sphère

$P_{88}$

$$\boxed{A = 4 \times \pi \times r \times r}$$

ou

$$\boxed{A = 4 \times \pi \times r^2}$$




Remarque :

**Valeur exacte** :
On laisse le résultat **en fonction de π**.

**Valeur approchée** :
On calcule en prenant $\pi \times$ **3,14**.

# Comment exprimer et calculer un volume ?

## 1. Unités de volume

**P89** **Le volume d'un solide** s'exprime avec **une unité de volume**.

**L'unité principale de volume** est **le mètre cube** ($m^3$) ; $1\ m^3 = 1\ 000\ dm^3$

| $m^3$ | | | $dm^3$ ou L | | | $cm^3$ | | | $mm^3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 7 | 4 | 3 | 0 | | | |
| | | 0 | 8 | 4 | 6 | | | | | | |

☞ $1\ dm^3 = 1\ L$

Exemple de conversions : $7{,}43\ dm^3 = 7\ 430\ cm^3$ et $846\ L = 0{,}846\ m^3$

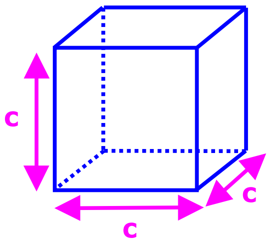
Remarques : - Pour calculer **un volume**, **il faut s'assurer** que **toutes les dimensions du solide** sont exprimées **dans la même unité**.
- Si **les dimensions** sont en **m**, **le volume** est en $m^3$ etc…

## 2. Pour un cube

**P90** $V = c \times c \times c$

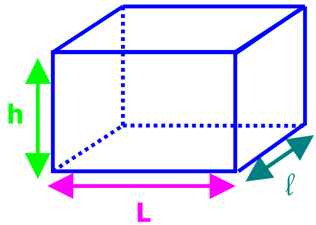
**ou**

$V = c^3$



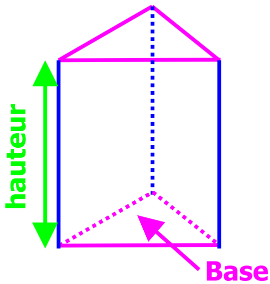

## 3. Pour un pavé droit

**P91** $V = L \times \ell \times h$




## 4. Pour un prisme droit

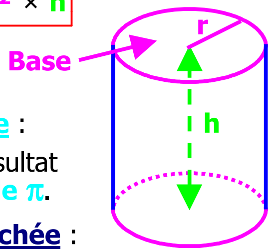
**P92** V = **aire de la base** × **hauteur**




## 5. Pour un cylindre

**P93** V = **aire de la base** × **hauteur**

**ou** $V = \pi \times r^2 \times h$




Remarque :

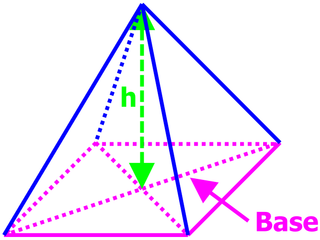
Valeur exacte : On laisse le résultat **en fonction de $\pi$**.

**Valeur approchée** : On calcule en prenant $\pi \times 3{,}14$.

## 6. Pour une pyramide

**$P_{94}$**

$$\boxed{V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}}$$

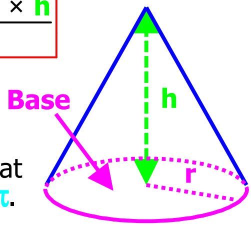



## 7. Pour un cône

**$P_{95}$**

$$\boxed{V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}}$$

**ou** $$\boxed{V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}}$$




Remarque :

**Valeur exacte** :

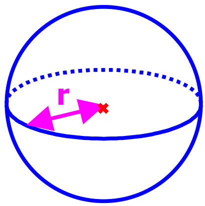
On laisse le résultat **en fonction de $\pi$**.

**Valeur approchée** :

On calcule en prenant $\pi$ × **3,14**.

## 8. Pour une boule

**$P_{96}$** $\boxed{V = \frac{4}{3} \times \pi \times r \times r \times r}$ **ou** $\boxed{V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3}$




Remarque :

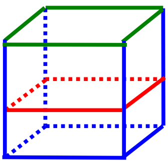
**Valeur exacte** : On laisse le résultat **en fonction de $\pi$**.

**Valeur approchée** : On calcule en prenant $\pi$ · **3,14**.

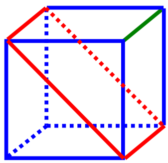
# Comment représenter la section d'un solide par un plan ?

## 1. Sections de cube

**$P_{97}$** **La section d'un cube** par **un plan parallèle à une face** est **un carré**.

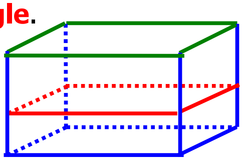


**$P_{98}$** **La section d'un cube** par **un plan parallèle à une arête** est **un rectangle**.

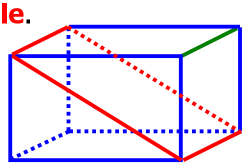


## 2. Sections de pavé droit

**$P_{99}$** **La section d'un pavé droit** par **un plan parallèle à une face** est **un rectangle**.

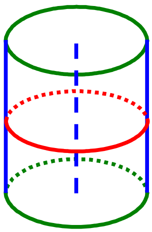


**$P_{100}$** **La section d'un pavé droit** par **un plan parallèle à une arête** est **un rectangle**.

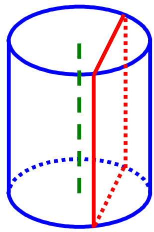


## 3. Sections de cylindre

**P$_{101}$ La section d'un cylindre** par **un plan parallèle à la base** est **un disque**.

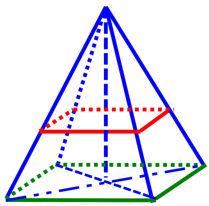


**P$_{102}$ La section d'un cylindre** par **un plan parallèle à l'axe** est **un rectangle**.



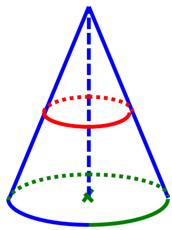
## 4. Section de pyramide

**P$_{103}$ La section d'une pyramide** par **un plan parallèle à la base** est **un polygone de même nature que la base**.



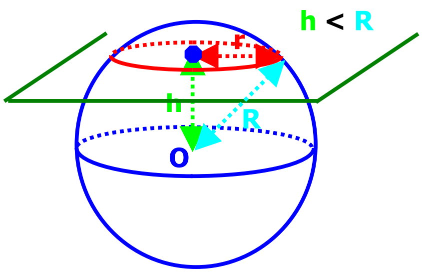
## 5. Section de cône

**P$_{104}$ La section d'un cône** par **un plan parallèle à la base** est **un disque**.



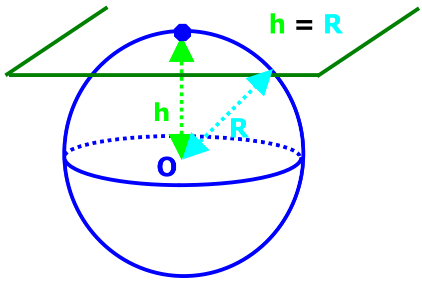
## 6. Sections de sphère

**P$_{105}$ La section d'une sphère** par **un plan** est **un cercle**.




Calcul du **rayon r** : $\boxed{r^2 + h^2 = R^2}$

**P$_{106}$ Le plan** et **la sphère** ont **un seul point commun**.




**Le plan** est **tangent** à **la sphère**.

Remarque : si $h > R$ **Le plan** et **la sphère** n'ont **aucun point commun**.

# Comment utiliser les effets d'un agrandissement ou d'une réduction ?

**Agrandissement : $k > 1$**
**Réduction : $0 < k < 1$**

## 1. Sur une longueur

**P$_{107}$** Dans **un agrandissement** ou **une réduction de coefficient k**, **on multiplie les longueurs** par **k**.

$$\text{Longueur initiale} \xrightarrow{\times k} \text{Longueur finale}$$

Remarque : **Les angles** de la figure sont **conservés**.

Exemple :
**L'arête** d'un cube mesure **4 cm**.
Quelle est **sa longueur** après **un agrandissement** de **coefficient 3** ?

$$4 \times 3 = \boxed{12\text{ cm}}$$

*Longueur initiale* — *k* — *Longueur finale*

## 2. Sur une aire

**P$_{108}$** Dans **un agrandissement** ou **une réduction de coefficient k**, **on multiplie les aires** par **k²**.

$$\text{Aire initiale} \xrightarrow{\times k^2} \text{Aire finale}$$

Exemple :
**L'aire** d'un triangle est **5 cm²**.
Quelle est **son aire** après **une réduction** de **coefficient 0,8** ?

$$5 \times 0{,}8^2 = 5 \times 0{,}64 = \boxed{3{,}2\text{ cm}^2}$$

*Aire initiale* — *k²* — *Aire finale*

## 3. Sur un volume

**P$_{109}$** Dans **un agrandissement** ou **une réduction de coefficient k**, **on multiplie les volumes** par **k³**.

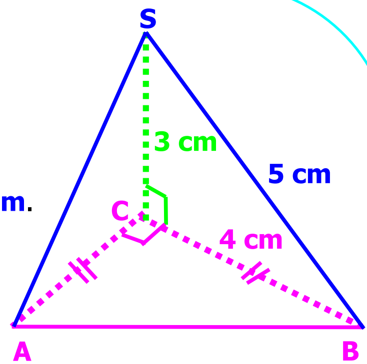
$$\text{Volume initial} \xrightarrow{\times k^3} \text{Volume final}$$

Exemple : **Le volume** d'une pyramide est **10 cm³**.
Quel est **son volume** après **un agrandissement** de **coefficient 2** ?

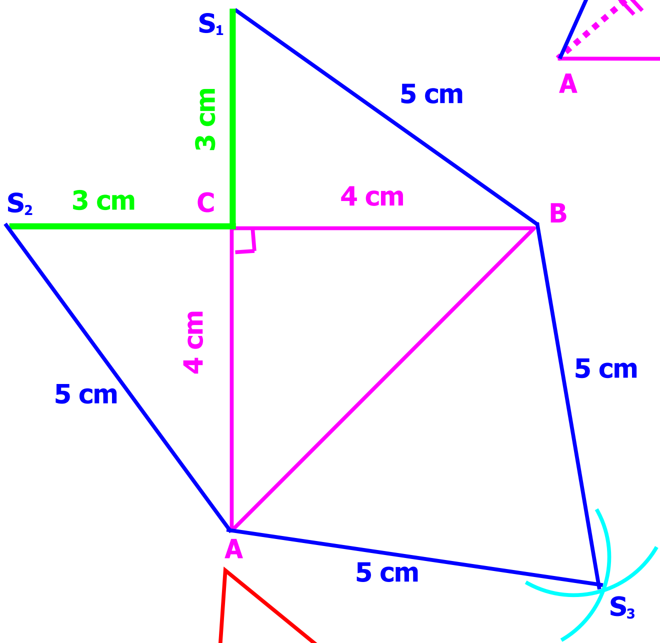
$$10 \times 2^3 = 10 \times 8 = \boxed{80\text{ cm}^3}$$

*Volume initial* — *k³* — *Volume final*

# Comment tracer un patron de solide ?




<u>Exemple</u> :
Tracer **un patron** du **tétraèdre SABC** dont **la base** est un triangle **rectangle et isocèle en C**.
**La hauteur** est l'arête **[SC]**.
**SC = 3 cm** ; **CA = CB = 4 cm** ; **SB = 5 cm**.




- *On trace **la base ABC**.*
- *On trace **les triangles SAC** et **SCB rectangles en C**.*
- *On trace **un arc de cercle** de **centre A** et de **rayon 5 cm**.*
- *On trace **un arc de cercle** de **centre B** et de **rayon 5 cm**.*

# INDEX

# 1 - PGCD - NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

## 1. Rappels sur la division euclidienne

| Dividende | Diviseur |
|---|---|
| Reste | Quotient |

**Dividende = diviseur × quotient + reste**

Dans une division euclidienne, le dividende, le diviseur, le quotient et le reste sont des **nombres entiers**.

Exemples :

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ \cline{2-2} -\ 18 & 9 \\ \hline 0 & \end{array}$$

**2 est un diviseur** de **18**.
Parce que la division "tombe juste", le reste est 0.

**9** est un autre diviseur de **18**.

$$\begin{array}{r|l} 26 & 4 \\ \cline{2-2} -\ 24 & 6 \\ \hline 2 & \end{array}$$

**4 n'est pas un diviseur** de **26**.
La division "ne tombe pas juste", il reste 2.

## 2. Diviseurs communs à deux entiers – PGCD

**Définition** Parmi les diviseurs communs à deux nombres entiers **a** et **b**, l'un deux est plus grand que les autres : on l'appelle le **Plus Grand Commun Diviseur** à a et b et on le note **PGCD(a ; b)**.

Exemple :

| Diviseurs de 12 | Diviseurs de 18 | Diviseurs communs à 12 et 18 | PGCD (12 ; 18) |
|---|---|---|---|
| **1** ; **2** ; **3** ; 4 ; **6** ; 12 | **1** ; **2** ; **3** ; **6** ; 9 ; 18 | **1** ; **2** ; **3** ; **6** | **6** |

## 3. Recherche du PGCD par soustractions successives (algorithme des différences )

**Propriété** Si **a** et **b** sont deux nombres entiers tels que **a > b**
alors **PGCD (a ; b) = PGCD(b ; a – b)**

le plus petit la différence

**Propriété** Le **Plus Grand Commun Diviseur** à deux nombres entiers est **la dernière différence non nulle** dans la succession des soustractions.

Exemple : Recherche du **PGCD** de **18** et **12** par **l'algorithme des différences**

*Ne pas oublier les titres des colonnes !*

| Plus grand nombre | Plus petit nombre | Différence |
|---|---|---|
| 18 | 12 | 6 |
| 12 | 6 | **6** |
| 6 | 6 | 0 |

**PGCD (12 ; 18) = 6** → *Ne pas oublier de donner la réponse !*

## 4. Nombres premiers entre eux

**Définition** On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur **PGCD** est égal à **1.**

Exemple de nombres premiers entre eux :

**PGCD** (**22** ; **7**) = **1** donc **22** et **7** sont premiers entre eux

Exemple de nombres qui ne sont pas premiers entre eux :

**12** et **15** sont divisibles par 3, donc **PGCD** (**12** ; **15**) n'est pas égal à **1**, donc **12** et **15** ne sont pas premiers entre eux.

# 2 - SIMPLIFIER UNE FRACTION

**Définition** **Simplifier une fraction**, c'est **trouver une fraction égale** avec **un numérateur** et **un dénominateur plus petits**.
Une fraction est **irréductible** lorsqu'on ne peut plus la simplifier

## 1. A l'aide des tables de multiplication

Exemples : $\frac{8}{12} = \boxed{\frac{2}{3}}$ (**On simplifie par 4**) $\frac{81}{90} = \boxed{\frac{9}{10}}$ (**On simplifie par 9**)

## 2. A l'aide des critères de divisibilité

**Critères de divisibilité**

- Un nombre **est divisible par 2** si **son dernier chiffre est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8**. Ex : 97**6**
- Un nombre **est divisible par 5** si **son dernier chiffre est 0 ou 5**. Ex : 73**5** ; 8 89**0**
- Un nombre **est divisible par 3** si **la somme de ses chiffres est un multiple de 3**. Ex : 2 004
- Un nombre **est divisible par 9** si **la somme de ses chiffres est un multiple de 9**. Ex : 378

Exemples : $\frac{22}{84} = \boxed{\frac{11}{42}}$ par 2 $\frac{105}{102} = \boxed{\frac{35}{34}}$ par 3 $\frac{95}{40} = \boxed{\frac{19}{8}}$ par 5 $\frac{63}{99} = \boxed{\frac{7}{11}}$ par9

## 3. A l'aide du PGCD

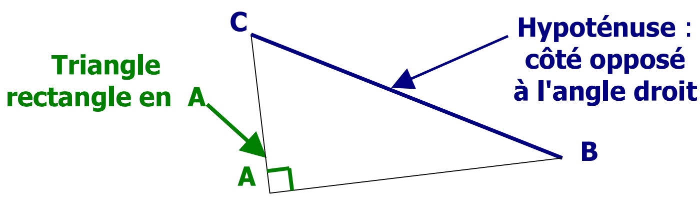
**Propriété** En **simplifiant** une fraction $\frac{a}{b}$ par le **PGCD** de **a** et **b**, on obtient **une fraction irréductible**.

Exemple : **PGCD** (**132** ; **77**) = **11** donc $\frac{132}{77} = \frac{11 \times 12}{11 \times 7} = \boxed{\frac{12}{7}}$ et $\frac{12}{7}$ est une fraction **irréductible**.

# 3 - THEOREME DE PYTHAGORE ET RECIPROQUE

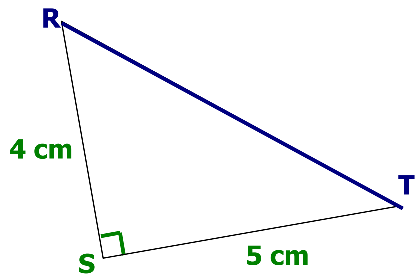
## 1. Calculer la longueur d'un côté avec le théorème de Pythagore

Si **ABC est un triangle rectangle en A** alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.




Remarque : On a aussi $AB^2 = BC^2 - AC^2$ et $AC^2 = BC^2 - AB^2$

### Calculer la longueur de l'hypoténuse




Calculer **RT** (**valeur exacte** et **valeur arrondie à 1 mm près**).

**Dans le triangle RST rectangle en S,**
**d'après le théorème de Pythagore :**

$RT^2 = SR^2 + ST^2$

$RT^2 = 4^2 + 5^2$

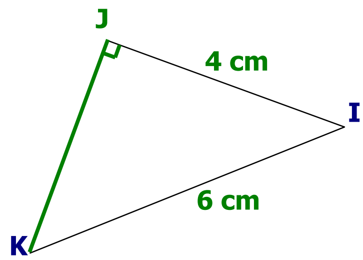
$RT^2 = 16 + 25$

$RT^2 = 41$

$RT = \boxed{\sqrt{41} \text{ cm}}$ **valeur exacte**

$RT \approx \boxed{6{,}4 \text{ cm}}$ **valeur arrondie à 1 mm près**

### Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit




Calculer **JK** (**valeur exacte** et **valeur arrondie à 1 mm près**).

**Dans le triangle IJK rectangle en J,**
**d'après le théorème de Pythagore :**

$JK^2 = IK^2 - JI^2$

$JK^2 = 6^2 - 4^2$

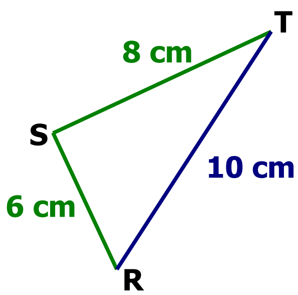
$JK^2 = 36 - 16$

$JK^2 = 20$

$JK = \boxed{\sqrt{20} \text{ cm}}$ **valeur exacte**

$JK \approx \boxed{4{,}5 \text{ cm}}$ **valeur arrondie à 1 mm près**

## 2. Montrer qu'un triangle est rectangle avec la réciproque du théorème de Pythagore




**Démontrer que le triangle RST est rectangle**

**Dans le triangle RST, [RT] est le plus long côté.**

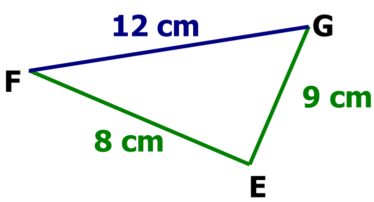
$RT^2 = 10^2$
$= 100$

$RS^2 + ST^2 = 6^2 + 8^2$
$= 36 + 64$
$= 100$

$RT^2 = RS^2 + ST^2$

**D'après la réciproque du théorème de Pythagore**
**le triangle RST est rectangle en S.**

## 3. Montrer qu'un triangle n'est pas rectangle




**Démontrer que le triangle EFG n'est pas rectangle**

**Dans le triangle EFG, [FG] est le plus long côté.**

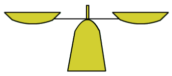
$FG^2 = 12^2$
$= 144$

$EF^2 + EG^2 = 8^2 + 9^2$
$= 64 + 81$
$= 145$

$RT^2 \neq RS^2 + ST^2$

**Le triangle EFG n'est pas rectangle.**

# 4. EQUATIONS DU 1er DEGRE A UNE INCONNUE



| Equation du type : $x + a = b$ | Equation du type : $x - a = b$ | Equation du type : $-x + a = b$ |
|---|---|---|
| $x + 9 = 3$<br>$x = 3 - 9$<br>$x = \boxed{-6}$<br><br>**La solution** de l'équation est $x = -6$.<br><br>*On vérifie :* $-6 + 9 = 3$ | $x - 7 = 2$<br>$x = 2 + 7$<br>$x = \boxed{9}$<br><br>**La solution** de l'équation est $x = 9$.<br><br>*On vérifie :* $9 - 7 = 2$ | $-x + 9 = 3$<br>$-x = 3 - 9$<br>$-x = -6$<br>$x = \boxed{6}$<br><br>**La solution** de l'équation est $x = 6$.<br><br>*On vérifie :* $-6 + 9 = 3$ |

☞ **Lorsqu'il y a un signe - devant $x$ :** Si on trouvait $-x = 4$ et on en déduirait que $x = -4$.

| Equation du type : $ax = b$ | Equation du type : $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ | Equation du type : $\frac{a}{x} = b$ |
|---|---|---|
| $5x = 3$<br>$x = \boxed{\frac{3}{5}}$<br><br>**La solution** de l'équation est $x = \frac{3}{5}$.<br><br>*On vérifie :* $5 \times \frac{3}{5} = 3$ | $\frac{x}{7} = \frac{2}{5}$<br>$5x = 2 \times 7$<br>$5x = 14$<br>$x = \boxed{\frac{14}{5}}$<br>$x = \boxed{2{,}8}$<br><br>**La solution** de l'équation est $x = 2{,}8$. | $\frac{5}{x} = 3$<br>$\frac{5}{x} = \frac{3}{1}$<br>$3x = 5 \times 1$<br>$x = \frac{5 \times 1}{3}$<br>$x = \boxed{\frac{5}{3}}$<br><br>**La solution** de l'équation est $x = \frac{5}{3}$. |

**Important :**

$5x = 3$ signifie $5 \times x = 3$.

**Le signe de multiplication est sous-entendu entre un nombre et une lettre.**

**On peut donner le résultat :**

- **sous forme de fraction :** $\frac{14}{5}$
- **sous forme décimale : 2,8**

**Lorsque la division ne se termine pas**, on ne peut pas donner le résultat sous forme décimale, on le donne forcément **sous forme de fraction**.

| Equation du type : $ax + b = c$ | Equation du type : $ax + b = cx + d$ |
|---|---|
| $4x + 7 = 5$<br>$4x = 5 - 7$<br>$4x = -2$<br>$x = \boxed{-0{,}5}$<br><br>**La solution** de l'équation est $x = -0{,}5$.<br><br>*On vérifie :* $4 \times (-0{,}5) + 7 = -2 + 7 = 5$ | $4x - 9 = x + 5$<br>$4x - x = +5 + 9$<br>$3x = 14$<br>$x = \boxed{\frac{14}{3}}$<br><br>**La solution** de l'équation est $x = \frac{14}{3}$. |

<u>Remarque</u> : Lorsque la vérification est compliquée, il vaut mieux ne pas la faire pour éviter :

- de faire des erreurs dans les calculs ;
- de perdre beaucoup de temps.

# 5. LA PROPRIETE DE THALES

## 1. Enoncé

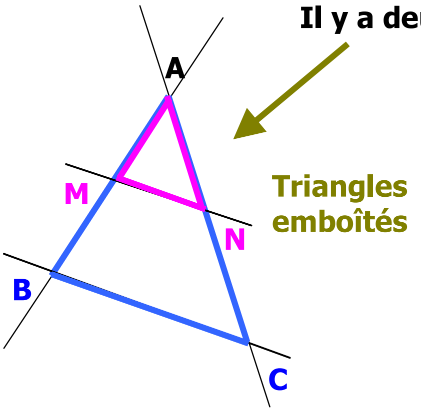
**Propriété de Thalès :**

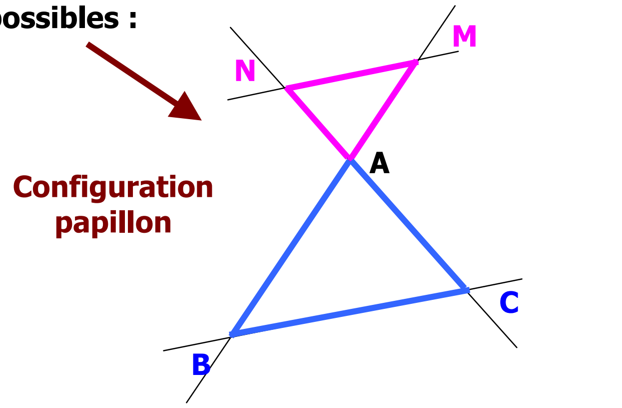
Si dans les triangles **AMN** et **ABC** :

- **A**, **M** et **B** sont **alignés** ;
- **A**, **N** et **C** sont **alignés** ;
- **(MN)** et **(BC)** sont **parallèles**.

**alors** $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

**Il y a deux configurations possibles :**



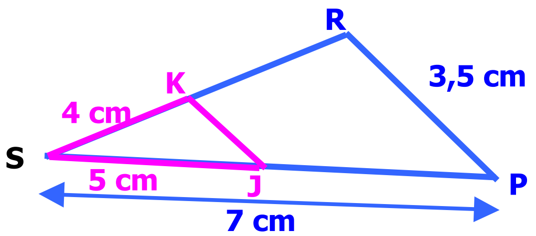

Dans les hypothèses de la propriété de Thalès, le tableau suivant est un **tableau de proportionnalité** :

| | Côtés portés par la droite (AB) | Côtés portés par la droite (AC) | Côtés portés par les **parallèles** |
|---|---|---|---|
| **Côtés de AMN** | **AM** | **AN** | **MN** |
| **Côtés de ABC** | **AB** | **AC** | **BC** |

## 2. Application

La propriété de Thalès permet de **calculer des longueurs**.

**Exemple 1** : **(JK)** // **(RP)**.
Calculer **JK** et **RS.**




Dans les triangles **SJK** et **SPR** de sommet commun **S** :

- **S**, **J** et **P** sont **alignés** ;
- **S**, **K** et **R** sont **alignés** ;
- **(JK)** et **(RP)** sont **parallèles**.

D'après la **propriété de Thalès**, on a :

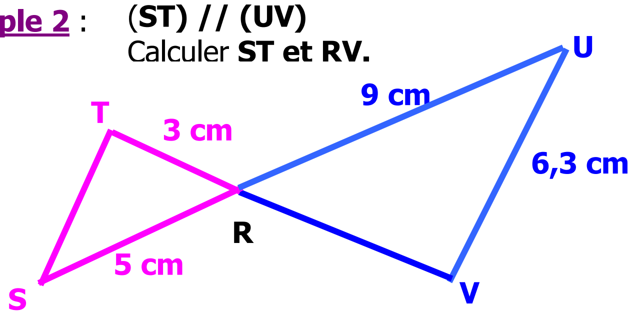
$$\frac{SJ}{SP} = \frac{SK}{SR} = \frac{JK}{PR}$$

donc $\dfrac{5}{7} = \dfrac{4}{SR} = \dfrac{JK}{3,5}$

**Calcul de JK :** $JK = \dfrac{5 \times 3,5}{7} = \dfrac{17,5}{7} = \boxed{2,5\text{ cm}}$

**Calcul de RS :** $RS = \dfrac{4 \times 7}{5} = \dfrac{28}{5} = \boxed{5,6\text{ cm}}$

**Exemple 2** : **(ST) // (UV)**
Calculer **ST et RV.**




Dans les triangles **RST** et **RUV** de sommet commun **R** :

- **R**, **S** et **U** sont **alignés** ;
- **R**, **T** et **V** sont **alignés** ;
- **(ST)** et **(UV)** sont **parallèles**.

D'après la **propriété de Thalès**, on a :

$$\frac{RS}{RU} = \frac{RT}{RV} = \frac{ST}{VU}$$

donc $\dfrac{5}{9} = \dfrac{3}{RV} = \dfrac{ST}{6,3}$

**Calcul de ST :** $ST = \dfrac{5 \times 6,3}{9} = \dfrac{31,5}{9} = \boxed{3,5\text{ cm}}$

**Calcul de RV :** $RV = \dfrac{9 \times 3}{5} = \dfrac{27}{5} = \boxed{5,4\text{ cm}}$

# 6. INEGALITES ET OPERATIONS

## 1. Les signes d'inégalité

Dans une inégalité, on trouve toujours l'un des **4 signes** suivants :

| | |
|---|---|
| $<$ se lit " **est strictement inférieur à** "<br>Nombres entiers positifs tels que $x < 3$ : 0 ; 1 ; 2 | $>$ se lit " **est strictement supérieur à** "<br>Nombres entiers positifs tels que $x > 3$ : 4 ; 5 ; 6 etc. |
| $\leq$ se lit " **est inférieur ou égal à** "<br>Nombres entiers positifs tels que $x \leq 3$ : 0 ; 1 ; 2 ; **3** | $\geq$ se lit " **est supérieur ou égal à** "<br>Nombres entiers positifs tels que $x \geq 3$ : **3** ; 4 ; 5 etc. |

## 2. Ordre et opérations

**Propriété**
Dans une inégalité, **l'ordre est conservé** par :
- l'**addition** et la **soustraction**
- la **multiplication** et la **division** par **un nombre positif**

**Propriété**
Dans une inégalité, **l'ordre est changé** par la **multiplication** et la **division** par **un nombre négatif**.

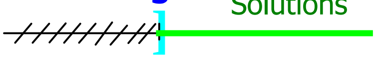
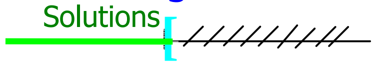
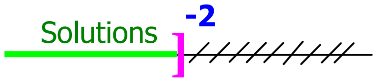
# 7. INEQUATIONS

## 1. Définition

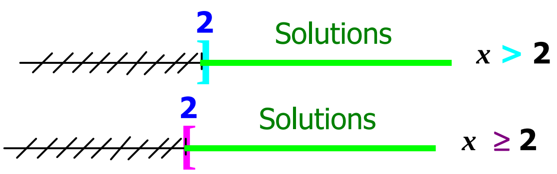
① Une **inéquation** est une **inégalité** comportant une **inconnue.**
② **Résoudre une inéquation**, c'est **trouver toutes les valeurs** de l'inconnue **qui rendent vraie l'inégalité**. Ces valeurs de l'inconnue sont appelées **les solutions** de **l'inéquation**.

## 2. Résolution

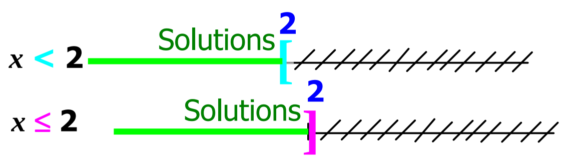
**Principe :** C'est la même méthode de résolution que pour les équations **sauf** quand on **prend l'opposé**, on **change le sens de l'inégalité** (cela revient à multiplier par un nombre négatif).

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Résolution de l'inéquation** | $2x > 6$<br>$x > \frac{6}{2}$<br>$x > 3$ | $-2x > 6$<br>$2x < -6$<br>$x < \frac{-6}{2}$<br>$x < -3$ | $-4x + 1 \geq 9$<br>$-4x \geq 9 - 1$<br>$-4x \geq 8$<br>$4x \leq -8$<br>$x \leq \frac{-8}{4}$<br>$x \leq -2$ |
| **Ensemble des solutions** | <br>3 Solutions<br>**Les solutions** de l'inéquation sont **les nombres strictement supérieurs à 3.** | <br>Solutions -3<br>**Les solutions** de l'inéquation sont **les nombres strictement inférieurs à -3.** | <br>Solutions -2<br>**Les solutions** de l'inéquation sont **les nombres inférieurs ou égaux à -2.** |

## 3. Représenter les solutions d'une inéquation : les quatre possibilités




$x$ **est plus grand que 2** donc
**les solutions** sont **à droite** de **2**.




$x$ **est plus petit que 2** donc
**les solutions** sont **à gauche** de **2**.

Lorsqu'il y a le **signe** "=" en plus de "<" ou ">", on oriente **le crochet du côté des solutions** pour indiquer que **2 convient.**

On utilise ces règles quand on fait une **addition**

Pour ajouter deux nombres de **<u>même signe</u>** :
- on fait une addition
- on garde le signe.

(- 6) + (- 2) = - 8
- 6   -2 = - 8

Addition sous-entendue

Pour ajouter deux nombres de **<u>signes différents</u>** :
- on fait une soustraction
- on prend le signe de celui qui l'emporte.

(+ 4) + (- 2) = +2
+ 4   -2 = +2

Addition sous-entendue

On utilise cette règle quand on fait une **soustraction**


Pour soustraire un nombre, on ajoute son opposé :

(-3) - (+2) = (-3) + (-2) = -5

On ne touche pas au nombre qui était avant le -

On change le signe du nombre qui était après le -

On transforme la soustraction en addition

(-5) - (-3) + (- 4) - (+7) = (-5) + (+3) + (- 4) + (-7) = -13

On utilise ce tableau ou ces règles quand on fait une **multiplication** ou une **division**

| × | + | - |
|---|---|---|
| + | + | - |
| - | - | + |

**Même signe : +**
(- 6) × (- 2) = +12
(-6) ÷ (-2) = +3

**Signes différents : -**
(+ 4) × (- 2) = - 8
(+ 4) ÷ (- 2) = - 2

# 9. RECIPROQUE DE LA PROPRIETE DE THALES

## 1. Enoncé

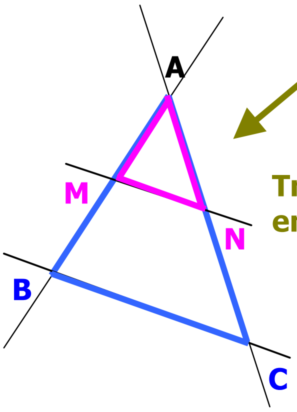
**Réciproque de la propriété de Thalès :**

Si dans les triangles **AMN** et **ABC** :

- **A**, **M** et **B** **sont alignés dans le même ordre que** **A**, **N** et **C** ;
- $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

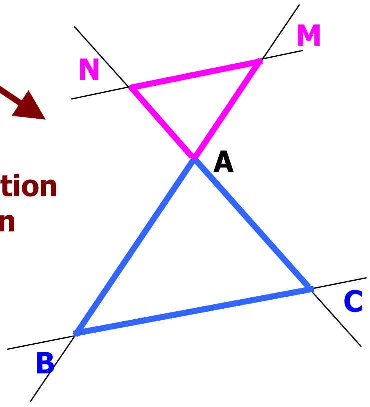
**alors (MN)** et **(BC) sont parallèles**.

**Il y a deux configurations possibles :**




**Triangles emboîtés**

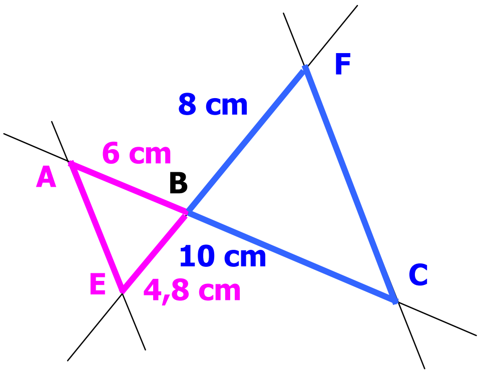
**Configuration papillon**




## 2. Application

☞ **La réciproque de la propriété de Thalès sert à démontrer que deux droites sont parallèles.**

**Exemple** : Démontrer que **(AE)** et **(FC)** **sont parallèles**.




Dans les triangles **BAE** et **BFC** :

- **A**, **B**, **C** **sont alignés dans le même ordre que** **E**, **B**, **F**.
- $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{6}{10}$ et $\dfrac{BE}{BF} = \dfrac{4,8}{8}$

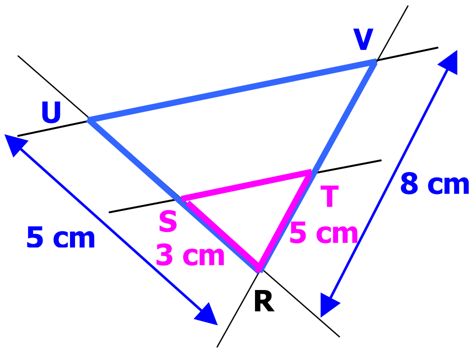
$6 \times 8 = 48$ et $10 \times 4,8 = 48$

Les produits en croix **sont égaux** donc $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BE}{BF}$.

D'après **la réciproque de la propriété de Thalès**,
**(AE)** et **(FC)** **sont parallèles**.

# DEMONTRER QUE DEUX DROITES NE SONT PAS PARALLELES

**Exemple** : Démontrer que **(ST)** et **(UV)** **ne sont pas parallèles**.




Dans les triangles **RST** et **RUV** :

- **R**, **S**, **U** **sont alignés dans le même ordre que** **R**, **T**, **V**.
- $\dfrac{RS}{RU} = \dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{RT}{RV} = \dfrac{5}{8}$

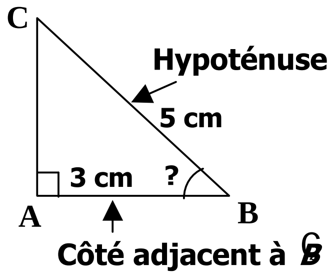
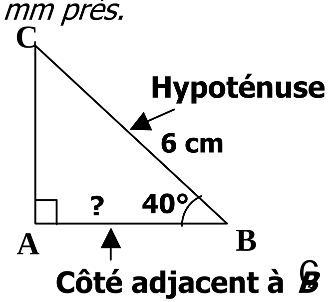
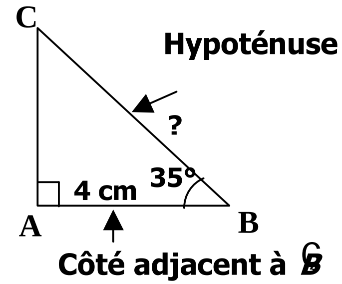
$3 \times 8 = 24$ et $5 \times 5 = 25$

Les produits en croix **ne sont pas égaux** donc $\dfrac{RS}{RU} \neq \dfrac{RT}{RV}$.

donc **(ST)** et **(UV)** **ne sont pas parallèles**.

# 10. Calculs avec les cosinus dans un triangle rectangle

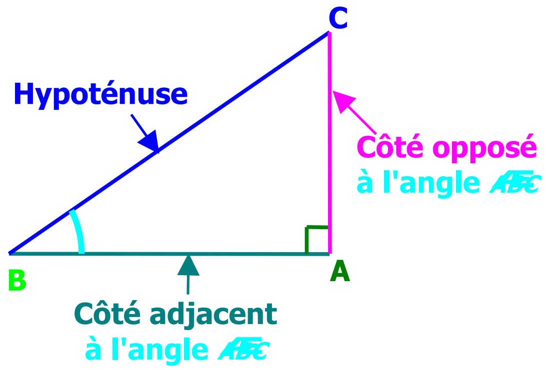
**cosinus d'un angle =** $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$

| **Calculer un angle** | **Au début, on procède de la même façon pour calculer un angle ou une longueur.** | **Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit** | **Calculer la longueur de l'hypoténuse** |
|---|---|---|---|
| *AB = 3 cm et BC = 5 cm*<br>*Calculer* $\widehat{ABC}$ *à 1° près.*<br> | **A partir de l'étape 4 :**<br>dans la colonne de gauche, le calcul d'un angle<br>dans la colonne de droite, le calcul d'une longueur | *ABC est un triangle rectangle en A*<br>$\widehat{ABC}$ *= 40° et BC = 6 cm. Calculer AB à 1 mm près.*<br> | *ABC est un triangle rectangle en A*<br>$\widehat{ABC}$ *= 35° et AB = 4 cm. Calculer BC à 1 mm près.*<br> |
| **ABC est un triangle rectangle en A** | **1) Hypothèse :** | **ABC est un triangle rectangle en A** | **ABC est un triangle rectangle en A** |
| $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$ | **2) Formule du cosinus :** | $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$ | $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{BA}{BC}$ |
| $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{3}{5}$ | **3) On remplace par les valeurs données dans l'énoncé** | $\cos 40° = \dfrac{BA}{6}$ | $\cos 35° = \dfrac{4}{BC}$ |
| | **4) On met la 1ère fraction "sur 1"** | $\dfrac{\cos 40°}{1} = \dfrac{BA}{6}$ | $\dfrac{\cos 35°}{1} = \dfrac{4}{BC}$ |
| $\widehat{ABC} \approx 53°$ **à 1° près**<br>♦ sur les calculatrices récentes, on tape $\cos^{-1}$ (3 : 5) exe<br>♦ sur les anciennes calculatrices, on tape 3 : 5 = $\cos^{-1}$<br>♦ $\cos^{-1}$ est obtenu avec 2nd cos ou shift cos ou inv cos suivant les calculatrices. | **4) On prend la calculatrice pour trouver l'angle avec la fonction $\cos^{-1}$ et on arrondit.**<br>**5) Les produits en croix sont égaux** | $BA = \dfrac{6 \times \cos 40°}{1}$ | $BC = \dfrac{4 \times 1}{\cos 35°}$ |
| | **6) On cherche la longueur demandée** | $BA = 6 \times \cos 40°$ | $BC = \dfrac{4}{\cos 35°}$ |
| | **7) On prend la calculatrice** | **BA ≈ 4,6 cm à 1 mm près**<br>*Plus petit que l'hypoténuse, normal.* | **BC ≈ 4,9 cm à 1 mm près**<br>*Plus grand que le côté de l'angle droit, normal.* |

**Penser à vérifier que le résultat est vraisemblable et à vérifier le résultat sur le dessin lorsque c'est possible.**

# 11. TRIANGLE RECTANGLE - TRIGONOMETRIE

## 1. Définitions : SOHCAHTOA




Dans **le triangle ABC rectangle en A** :

$\sin\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AC}{BC}$ ⟵ **SOH**

$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{AB}{BC}$ ⟵ **CAH**

$\tan\widehat{ABC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{AC}{AB}$ ⟵ **TOA**

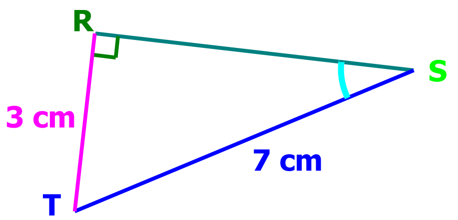
Remarque : Pour tout angle aigu $\widehat{ABC}$, $0 < \sin\widehat{ABC} < 1$ $\quad 0 < \cos\widehat{ABC} < 1$ $\quad 0 < \tan\widehat{ABC}$

## 2. Applications

**IMPORTANT : Vérifier que la calculatrice est réglée sur le mode degrés : DEG**

### a. Calcul de la mesure d'un angle

**Exemple :** RST est **un triangle rectangle en R** tel que **RT = 3 cm** et **ST = 7 cm**. Calculer $\widehat{RST}$ à 1° **près**.




*On connaît **le côté opposé** et **l'hypoténuse**, donc on utilise **SOH** pour trouver **l'angle**.*

Dans **le triangle RST rectangle en R** :

$\sin\widehat{RST} = \dfrac{RT}{ST}$

$\sin\widehat{RST} = \dfrac{3}{7}$ ⟵ *(nombre compris entre 0 et 1)*

$\widehat{RST} \approx \boxed{25°}$ **à 1° près** ⟵ *(angle entre 0 ° et 90°)*

**Calculatrice**

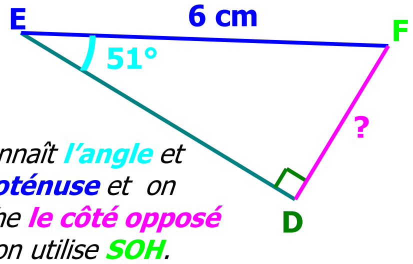
$\boxed{\sin^{-1}}$ (3 ÷ 7 =

ou

(3 ÷ 7) $\boxed{\sin^{-1}}$ =

### b. Calcul d'une longueur

**Exemple 1 :** DEF est **un triangle rectangle en D** tel que $\widehat{DEF}$ **= 51°** et **EF = 6 cm**.
Calculer **DF**. (**valeur exacte** et **valeur arrondie à 0,1 cm près**)




*On connaît **l'angle** et **l'hypoténuse** et on cherche **le côté opposé** donc on utilise **SOH**.*

Dans **le triangle DEF rectangle en D** :

$\sin\widehat{DEF} = \dfrac{DF}{EF}$

$\dfrac{\sin 51°}{1} = \dfrac{DF}{6}$

$DF = \boxed{6 \times \sin 51°\ \text{cm}}$ **valeur exacte**

$DF \approx \boxed{4{,}7\ \text{cm}}$ **à 0,1 cm près**

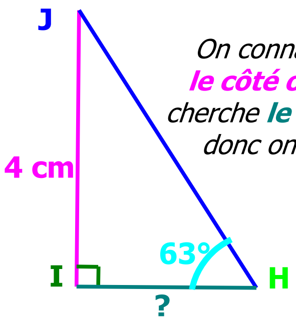
**Calculatrice**

6 × $\boxed{\sin}$ 51 =

ou

51 $\boxed{\sin}$ × 6 =

**Exemple 2 :** HIJ est **un triangle rectangle en I** tel que $\widehat{IHJ}$ **= 63°** et **IJ = 4 cm**.
Calculer **IH**.(**valeur exacte** et **valeur arrondie à 0,1 cm près**)




*On connaît **l'angle** et **le côté opposé** et on cherche **le côté adjacent** donc on utilise **TOA**.*

Dans **le triangle HIJ rectangle en I** :

$\tan\widehat{IHJ} = \dfrac{IJ}{IH}$

$\dfrac{\tan 63°}{1} = \dfrac{4}{IH}$

$IH = \boxed{\dfrac{4}{\tan 63°}\ \text{cm}}$ **valeur exacte**

$IH \approx \boxed{2\ \text{cm}}$ **à 0,1 cm près**

**Calculatrice**

4 ÷ $\boxed{\tan}$ 63 =

ou

4 ÷(63 $\boxed{\tan}$) =

## 12. Formules trigonométriques

**Propriétés** Soit $\hat{A}$ **un angle aigu**.

$$(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1 \quad \text{et} \quad \tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$$

**Application :** Le sinus d'un angle $\hat{A}$ est égal à 0,8. Sans calculer l'angle $\hat{A}$, calculer cos $\hat{A}$ et tan $\hat{A}$

$(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1$

$(\cos \hat{A})^2 + 0{,}8^2 = 1$

$(\cos \hat{A})^2 + 0{,}64 = 1$

$(\cos \hat{A})^2 = 1 - 0{,}64$

$(\cos \hat{A})^2 = 0{,}36$

$\cos \hat{A} = \sqrt{0{,}36}$

$\cos \hat{A} = \boxed{0{,}6}$

$\tan \hat{A} = \dfrac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$

$\tan \hat{A} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6}$

$\tan \hat{A} = \dfrac{8}{6}$

$\tan \hat{A} = \dfrac{4}{3}$

# 13. IDENTITES REMARQUABLES

## 1. Les carrés parfaits à savoir par cœur

4 9 16 25 36 49 64 81 100

## 2. Les identités remarquables

### a) Carré d'une somme

**Formule :** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**Développer :** $(x + 3)^2 = x^2 + \underbrace{6x}_{2 \times x \times 3} + 9$

**Factoriser :** $16x^2 + \underbrace{8x}_{2 \times 4x \times 1} + 1 = (4x + 1)^2$

### b) Carré d'une différence

**Formule :** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**Développer :** $(2x - 5)^2 = 4x^2 - \underbrace{20x}_{2 \times 2x \times 5} + 25$

**Factoriser :** $9x^2 - \underbrace{24x}_{2 \times 3x \times 4} + 16 = (3x - 4)^2$

### c) Produit

**Formule :** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Développer :** $(x + 9)(x - 9) = x^2 - 81$

**Factoriser :** $16x^2 - 9 = (4x + 3)(4x - 3)$

## 3. Calculer avec des identités remarquables

### a) Carré d'une somme

**Formule :** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

**Calculer $51^2$ sans calculatrice et sans poser l'opération :**

$$\begin{aligned} 51^2 &= (50 + 1)^2 \\ &= 2\,500 + 100 + 1 \\ &= 2\,601 \end{aligned}$$

### b) Carré d'une différence

**Formule :** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**Calculer $99^2$ sans calculatrice et sans poser l'opération :**

$$\begin{aligned} 99^2 &= (100 - 1)^2 \\ &= 10\,000 - 200 + 1 \\ &= 9\,801 \end{aligned}$$

### c) Produit

**Formule :** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Calculer $48 \times 52$ sans calculatrice et sans poser l'opération :**

$$\begin{aligned} 48 \times 52 &= (50 - 2) \times (50 + 2) \\ &= 2\,500 - 4 \\ &= 2\,496 \end{aligned}$$

**Formule :** $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

**Calculer $105^2 - 95^2$ sans calculatrice et sans poser l'opération :**

$$\begin{aligned} 105^2 - 95^2 &= (105 + 95) \times (105 - 95) \\ &= 200 \times 10 \\ &= 2\,000 \end{aligned}$$

# 14. PUISSANCES

## 1. Définition

### a) Puissances d'exposant positif

$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

$n$ est l'**exposant**

Exemple : $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

$a^0 = 1$ et $a^1 = a$

Exemples :

$7^0 = 1$

$(-4)^1 = -4$

### b) Puissances d'exposant négatif

$a^{-n}$ est **l'inverse** de $a^n$ : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemples : $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

$(-3)^{-4} = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81}$

☞ **Attention** à l'importance des parenthèses :

Exemples : $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$

$-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$

**Le signe est différent.**

## 2. Multiplication ou division avec des nombres identiques

Exemple : $4^2 \times 4^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4)$

donc $4^2 \times 4^3 = 4^5$

**Multiplication :** $a^n \times a^p = a^{n+p}$

Exemples : $5^2 \times 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$

$2^{-3} \times 2^5 = 2^{-3+5} = 2^2$

Exemple : $\dfrac{5^5}{5^3} = \dfrac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times 5 \times 5}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}} = 5^2$

**Division :** $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Exemples : $\dfrac{6^3}{6^8} = 6^{3-8} = 6^{-5}$

$\dfrac{9^4}{9^{-5}} = 9^{4-(-5)} = 9^{4+(+5)} = 9^9$

## 3. Multiplication ou division avec des exposants identiques

Exemple : $10^2 \times 6^2 = (10 \times 6) \times (10 \times 6) = 60^2$

**Multiplication :** $a^n \times b^n = (a \times b)^n$

Exemples : $5^3 \times 4^3 = (5 \times 4)^3 = 20^3$

$2^{-7} \times 3^{-7} = (2 \times 3)^{-7} = 6^{-7}$

☞ **Attention** : il n'y a **pas de règle de calcul** pour multiplier deux **nombres différents** élevés à des **puissances différentes** :

Exemple : $4^2 \times 2^3 = 16 \times 8$
$= 128$

Exemple : $\dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^3$

**Division :** $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemples : $\dfrac{24^5}{3^5} = \left(\dfrac{24}{3}\right)^5 = 8^5$

$\dfrac{10^{-1}}{5^{-1}} = \left(\dfrac{10}{5}\right)^{-1} = 2^{-1}$

☞ **Attention** à l'importance des parenthèses :

Exemples : $\dfrac{2^2}{7} = \dfrac{4}{7}$ et $\left(\dfrac{2}{7}\right)^2 = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{4}{49}$

## 4. Nombre deux fois de suite à une puissance

Exemple :

$(9^4)^2 = (9 \times 9 \times 9 \times 9) \times (9 \times 9 \times 9 \times 9)$

$(9^4)^2 = 9^8$

$(a^n)^p = a^{n \times p}$

Exemples : $(7^4)^3 = 7^{4 \times 3} = 7^{12}$

$(11^3)^{-2} = 11^{3 \times (-2)} = 11^{-6}$

## 5. Calculs avec plusieurs opérations

☞ **Attention** : Il n'y a **pas de règle de calcul** pour **additionner** ou **soustraire** des puissances.

On utilise **le code priorités** :

**PAPUMDAS**

**Parenthèses**

**Puissances**

$\times$ $\div$

**+ -**

Exemple 1 :

$3^2 + 3^4 =$

$9 + 81 = 90$

Le résultat n'est pas une puissance de 3 !

Exemple 2 :

$-4 + (-6)^2 \div (5 - 2) - 8 =$

$-4 + (-6)^2 \div 3 - 8 =$

$-4 + 36 \div 3 - 8 =$

$-4 + 12 - 8 = 0$

# 15. PUISSANCES DE 10

## 1. Définition

Pour tout nombre entier positif non nul n :

$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \dots\dots\dots \times 10}_{\text{n fois}} = \underbrace{1\,000\dots\dots0}_{\text{n zéros après 1}}$ $\qquad 10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}00\dots\dots01}_{\text{n zéros avant 1}}$ (ou n chiffres après zéro) $\qquad 10^0 = 1$

**Exemples** : $10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$ un million

$10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$ un centième

**Remarque** : $10^n$ et $10^{-n}$ sont **inverses** l'un de l'autre.

## 2. Propriétés

Les règles de calcul **sont les mêmes** que pour les puissances des autres nombres.
Pour tous nombres entiers relatifs n et p :

| $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$ | $\dfrac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$ | $(10^n)^p = 10^{np}$ |
|---|---|---|
| $10^5 \times 10^{-6} = 10^{-1}$ | $\dfrac{10^{-2}}{10^7} = 10^{-2-7} = 10^{-9}$ | $(10^3)^4 = 10^{3\times4} = 10^{12}$ |

**Exemples** : En combinant les règles de calcul

$3\times10^{-4}\times 5\times(10^4)^3 = 3\times5 \times 10^{-4}\times 10^{12} = \mathbf{15\times10^8}$ $\qquad \dfrac{5\times10^7\times4\times10^2}{2\times10^3\times5\times10^4} = \dfrac{20\times10^9}{10\times10^7} = \mathbf{2\times10^2}$

**Remarques** :

- La somme (ou la différence) de deux puissances de 10 **n'est pas une puissance de 10.**
  $10^2 + 10^3 = 100 + 1\,000 = \mathbf{1\,100}$ $\qquad 10^3 - 10^0 = 1\,000 - 1 = \mathbf{999}$
- En l'absence de règles de calcul, on applique les **priorités** des opérations : **PA.PU.M.D.A.S**
  $5{,}3 \times10^4 - 2\times10^3 = 53\,000 - 2\,000 = \mathbf{51\,000}$ $\qquad 2\times10^{-3} + 1{,}5\times10^{-2} = 0{,}002 + 0{,}015 = \mathbf{0{,}017}$

## 3. Produit d'un nombre par une puissance de 10

- **Pour multiplier un nombre par $10^n$, on décale la virgule de n rangs vers la droite et on ajoute des zéros si nécessaire.** $25 \times 10^2 = 2\,500$ $\qquad 4{,}75 \times 10^4 = 47\,500$
- **Pour multiplier un nombre par $10^{-n}$, on décale la virgule de n rangs vers la gauche et on ajoute des zéros si nécessaire.** $47 \times 10^{-2} = 0{,}47$ $\qquad 3{,}7 \times 10^{-3} = 0{,}0037$

## 4. Ecriture scientifique (notation utilisée par la calculatrice)

**L'écriture scientifique** d'un nombre décimal est de la forme : $\mathbf{a \times 10^n}$

**a nombre décimal tel que $1 \le a < 10$** $\qquad$ **n : entier relatif**

**Important : a** n'a qu'**un seul chiffre avant la virgule (autre que 0)**

**Exemples :**

| Nombre | | Ecriture scientifique |
|---|---|---|
| 25 000 | 2,5 × …. Ensuite, on cherche de combien de rangs il faut décaler la virgule, on trouve 4 rangs vers la droite. | $2{,}5 \times 10^4$ |
| 0,037 | 3,7 × …Ensuite, on cherche de combien de rangs il faut décaler la virgule, on trouve 2 rangs vers la gauche. | $3{,}7 \times 10^{-2}$ |

## 5. Utilisation des calculatrices

- **Lecture d'un nombre :** $\boxed{21.\quad 04}$ ou $\boxed{21.\ ^{04}}$ ou $\boxed{21\times10^{04}}$ signifie : $21 \times 10^4 = 210\,000$
- **Saisie d'un nombre (à titre indicatif, vérifiez avec votre calculatrice !) :**
  - Avec $\boxed{\times10^x}$ **ou** $\boxed{\text{EE}}$ qui signifie **"Multiplié par 10 puissance"** **il ne faut pas taper le signe × ni 10**
  - Avec $\boxed{\wedge}$, $\boxed{x^y}$, $\boxed{y^x}$ ou $\boxed{\text{Exp}}$ qui signifie **"puissance"** **il faut taper le signe × et 10**

On choisit une écriture scientifique ou normale avec la touche Mode de la calculatrice (Norm ou Sci).
En mode scientifique, la calculatrice demande le nombre de chiffres pour l'écriture du résultat.

# 16 - Factorisations

**Factoriser signifie "écrire sous forme d'un produit de facteurs".**

**On se pose la question "Est-ce qu'on peut mettre un nombre ou une lettre en facteur, ou les deux ?"**

***$15x - 25 + 30x^2$*** — ***15, 25 et 30 sont dans la table de 5, on peut mettre 5 en facteur.***
***25 est seul, donc on ne peut pas mettre x en facteur.***

$15x - 25 + 30x^2 = 5\,(\dots - \dots + \dots) = 5\,(3x - 5 + 6x^2)$

***$3x - 4x^2$*** — ***3 et 4 ne sont pas dans une même table, on ne peut pas mettre de nombre en facteur.***
***On peut mettre x en facteur***

$3x - 4x^2 = x\,(\dots - \dots) = x\,(3 - 4x)$

***On cherche ce qu'il faut mettre à la place de …***
***L'étape avec … ne s'écrit pas sur la copie.***

***$3x^2 + 9x - 6x^3$*** — ***3, 9 et 6 sont dans la table de 3, donc on peut mettre 3 en facteur.***
***On peut mettre x en facteur. On peut donc mettre 3x en facteur.***

$3x^2 + 9x - 6x^3 = 3x\,(\dots + \dots - \dots) = 3x\,(x + 3 - 2x^2)$

**Si on ne peut pas mettre de nombre ni de lettre en facteur, on regarde si c'est une identité remarquable.**

***$9x^2 - 25$*** — ***On ne peut pas mettre de nombre ni x en facteur, donc on cherche si c'est une identité remarquable.***

$9x^2 - 25$ : $(3x)^2$ et $5^2$

***C'est l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$***

***Donc*** $9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5)$

***$4x^2 - 12x + 9$*** — ***On ne peut pas mettre de nombre ni x en facteur, donc on cherche si c'est une identité remarquable.***

$4x^2 - 12x + 9$ : $(2x)^2$ et $3^2$

***C'est l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$***

***Donc*** $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

***$16 + 40x + 25x^2$*** — ***On ne peut pas mettre de nombre ni x en facteur, donc on cherche si c'est une identité remarquable.***

$16 + 40x + 25x^2$ : $4^2$ et $(5x)^2$

***C'est l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$***

***Donc*** $16 + 40x + 25x^2 = (4 + 5x)^2$

**Si on ne peut pas mettre de nombre ni de lettre en facteur, si ce n'est pas une identité remarquable, on regarde si on peut mettre une parenthèse en facteur.**

**On regarde s'il y a la même parenthèse dans chacun des groupes (les groupes sont séparés par les signes d'addition ou de soustraction).**

**Mettre une parenthèse en facteur, cas d'une somme**

$(5x-2)(4-3x) + (6x-1)(4-3x)$

$= (4-3x)\,[(5x-2) + (6x-1)]$ — On **supprime le signe d'addition** et les **parenthèses**.

$= (4-3x)\,(5x - 2 + 6x - 1)$ — On **regroupe les *x* entre eux et les nombres entres eux** avec la règle des signes de l'addition.

$= (4-3x)\,(11x - 3)$

**Mettre une parenthèse en facteur, cas d'une différence**

$(5-2x)(4x-3) - (3x-7)(5-2x)$

$= (5-2x)\,[(4x-3) - (3x-7)]$ — Pour **soustraire une parenthèse**, on **ajoute son opposé**.

$= (5-2x)\,[(4x-3) + (-3x + 7)]$ — On **supprime le signe d'addition** et les **parenthèses**.

$= (5-2x)\,(4x - 3 - 3x + 7)$ — On **regroupe les *x* entre eux et les nombres entres eux** avec la règle des signes de l'addition.

$= (5-2x)\,(x+4)$

# 17 - NOTION DE FONCTION

## 1. Un exemple de fonction

| Nombre | | Image |
|---|---|---|
| -3 | → | 9 |
| 0 | → | 0 |
| 1 | → | 1 |
| 2 | → | 4 |
| 4 | → | 16 |
| 5 | → | 25 |

On peut définir une fonction de plusieurs façons différentes, par :
- un tableau de valeurs : c'est le cas de cet exemple
- un programme de calcul : ici, élever un nombre au carré
- une formule : ici, $f(x) = x^2$
- une représentation graphique.

**Définition** $f$ est appelée **une fonction**.
C'est une « **machine** » mathématique qui, **à un nombre donné**, fait correspondre **un autre nombre**.

nombre de départ $\boxed{x} \xmapsto{f} \boxed{x^2}$ Image

## 2. Notations et vocabulaire

**L'image de** $x$ dépend de la valeur de $x$ et **varie en fonction de** $x$. $x$ est appelée la **variable**.

Dans l'exemple précédent, on note : $\boxed{f : x \mapsto x^2}$ ou $\boxed{f(x) = x^2}$

Remarque : $f(x)$ se lit « $f$ de $x$ ».

Dans cet exemple : $f : 3 \mapsto 9$ ou $f(3) = 9$

**Définitions** On dit que : - l'**image** de **3** par **la fonction** $f$ est **9**.
- **3** est un **antécédent** de **9** par $f$.

$3 \mapsto 9$

**Antécédent de 9.** **Image de 3.**

Remarques :
**Un nombre** possède une **unique image**.
Cependant **cette image** peut avoir **plusieurs antécédents**.

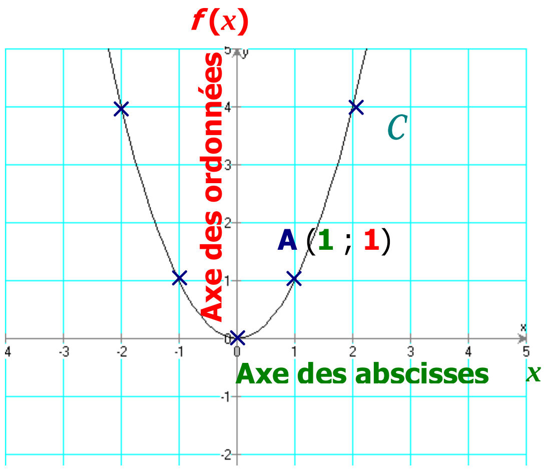
Par exemple les antécédents de **9** sont **3** et **-3** car $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$

## 3. Représentation graphique d'une fonction

Pour tracer **la représentation graphique** de **la fonction** $f$ dans un repère, on place **les points** ayant :
- comme abscisse **des valeurs de** $x$ que l'on choisit ;
- comme ordonnée **la valeur** $f(x)$ **correspondante**.

On place de cette façon **tous les points** correspondants aux données **du tableau de valeurs** :

| $x$ | **-2** | **-1** | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | **4** | **1** | **0** | **1** | **4** |




Par exemple : **le point A** de coordonnées (**1** ; **1**)

**Définition** En reliant **les points**, on obtient **une courbe** $C$ appelée **représentation graphique** de **la fonction** $f$.

**Tout point** de **la courbe** $C$ possède donc des coordonnées de la forme ($x$ ; $f(x)$)

**Pour tracer la représentation graphique d'une fonction, on peut utiliser** (lien sur le site du collège) :
- un **tableur**, par exemple **Excel** "nuage de points" ou **Open Office** (gratuit) "XY (dispersion)"
- un **grapheur**, par exemple **Geogebra** (gratuit) : on tape $y = x^2$ et on obtient la représentation graphique de la fonction f qui à $x$ fait correspondre $x^2$.

# 17 bis - FONCTIONS : EN PRATIQUE

**Dans cette fiche, nous allons utiliser la fonction f : $x \to x^2$**

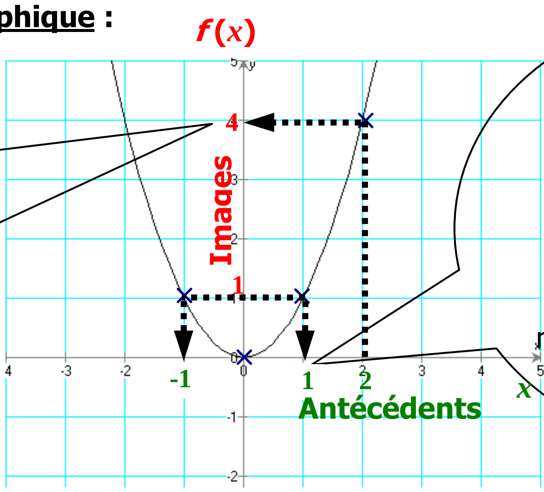
| | | | |
|---|---|---|---|
| $f :$ $x$ | $\to$ $x^2$ | $5 \mapsto 25$ | |
| **Antécédent** | **Image** | **Antécédent de 25.** | **Image de 5.** |
| **Nombre de départ** | **Nombre d'arrivée** | | |

$f(5) = 25$ signifie que **l'image de 5 est 25**

**<u>Avec un tableau de valeur</u> :**

| $x$ | -2 | 0 | 1 | 5 | Antécédents |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 0 | 1 | 25 | Images |

**<u>Avec une représentation graphique</u> :**




**L'image de 2 est 4 :** Pour la trouver, il faut **prendre 2 sur l'axe horizontal**, aller jusqu'à la courbe puis jusqu'à l'autre axe afin d'obtenir le nombre correspondant qui sera une **image.**

**Les antécédents de 1 sont 1 et -1** Pour les trouver, il faut **prendre 1 sur l'axe vertical**, aller jusqu'à la courbe puis jusqu'à l'autre axe afin d'obtenir les nombres correspondants qui seront des **antécédents**.

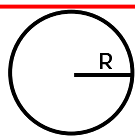
C'est souvent plus difficile pour zéro : si on ne réussit pas, on peut prendre un nombre proche de zéro et regarder comment on procède. Ensuite, on fait pareil pour zéro.

# 18 - PERIMETRES - AIRES - VOLUMES

## PERIMETRE

**N'importe quelle figure sauf le cercle :**
**on ajoute les longueurs de tous les côtés,**
**en faisant le tour de la figure**

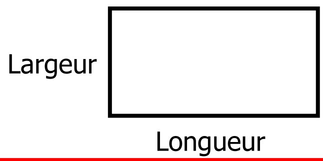
**Cercle : diamètre × π**
ou **2 π R**

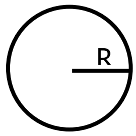



## AIRES

**Rectangle : Longueur × largeur**

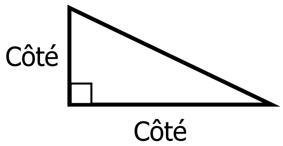
**Disque : π R²**

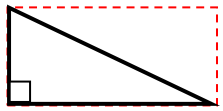



### Moitié d'un rectangle, donc formule avec "Division par 2"

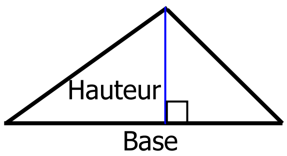
**Triangle rectangle** : $\dfrac{\textbf{côté} \times \textbf{côté}}{\textbf{2}}$

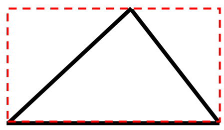


C'est la **moitié d'un rectangle**

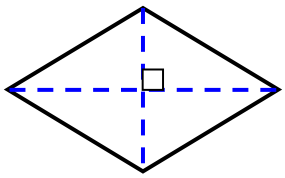
**Triangle** : $\dfrac{\textbf{Base} \times \textbf{Hauteur}}{\textbf{2}}$

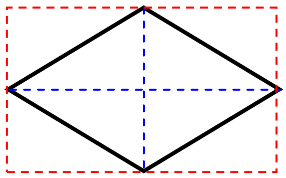


C'est la **moitié d'un rectangle**

**Losange** : $\dfrac{\textbf{Grande diagonale} \times \textbf{Petite diagonale}}{\textbf{2}}$



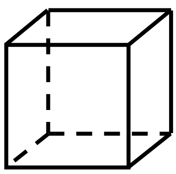


C'est la **moitié d'un rectangle**

## VOLUMES

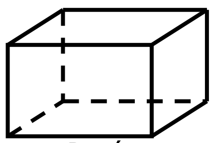
**Volume d'un solide droit :**

**Aire de la base × hauteur**



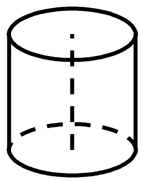
Cube

arête × arête × arête



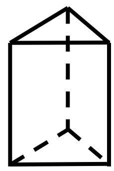
Pavé

longueur × largeur × hauteur



Cylindre

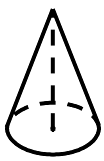
π R² × hauteur

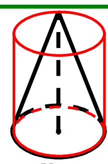


Prisme droit

### Solide en pointe : tiers d'un solide droit, donc formule avec "Division par 3"

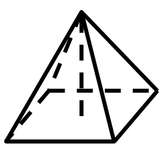
**Cône :** $\dfrac{\textbf{aire base} \times \textbf{hauteur}}{\textbf{3}} = \dfrac{\pi \textbf{ R}^2 \times \textbf{h}}{\textbf{3}}$

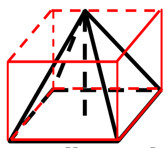




C'est le tiers **d'un cylindre**

**Pyramide :** $\dfrac{\textbf{aire base} \times \textbf{hauteur}}{\textbf{3}}$





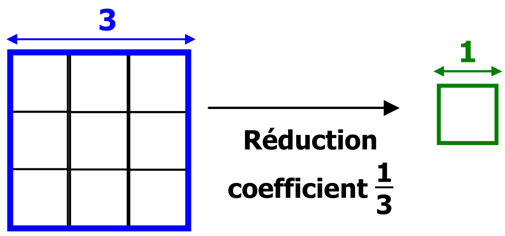
C'est le tiers **d'un prisme droit**

# 19 - AGRANDISSEMENT- REDUCTION

| | |
|---|---|
| **Définition** | A partir d'une figure, on réalise une figure de même **nature en multipliant ses dimensions par un nombre k > 0.** On obtient alors :<br>➔ une **figure agrandie** lorsque **k > 1**<br>➔ une **figure réduite** lorsque **k < 1** |

| | |
|---|---|
| **Propriétés** | Dans **un agrandissement** ou **une réduction** de **coefficient k** :<br>➔ les **aires** sont multipliées par $k^2$<br>➔ les **volumes** sont multipliés par $k^3$<br>➔ les **angles sont conservés** |

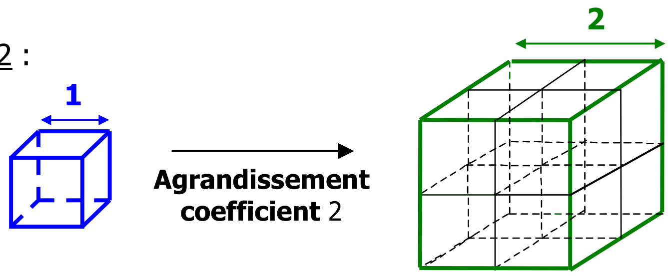
Ex 1 :




Le **petit carré** est **une réduction** du **grand carré** de coefficient $k = \frac{1}{3}$.

donc $\mathcal{A}' = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \mathcal{A} = \frac{1}{9} \times \mathcal{A}$

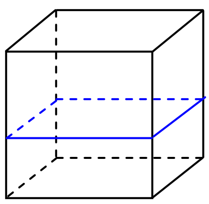
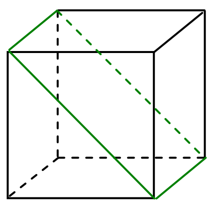
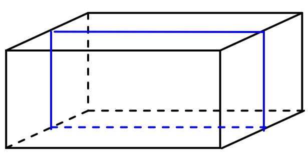
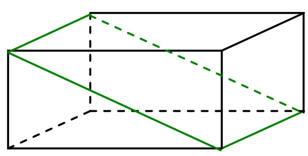
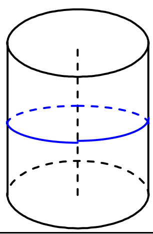
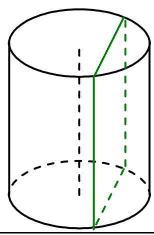
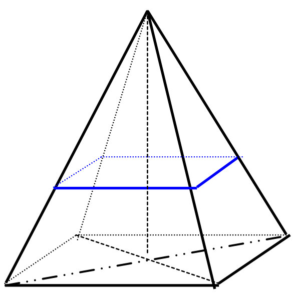
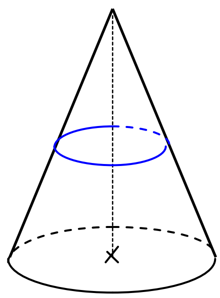
Ex 2 :




Le **grand cube** est **un agrandissement** du **petit cube** de coefficient **k = 2**.

donc $\mathcal{V}' = 2^3 \times \mathcal{V} = 8 \times \mathcal{V}$

# 20 - SECTION PLANES DE SOLIDES

| | | | |
|---|---|---|---|
| La section d'un cube par **un plan parallèle à une face** est **un carré**. |  | La section d'un cube par **un plan parallèle à une arête** est **un rectangle**. |  |
| La section d'un parallélépipède rectangle par **un plan parallèle à une face** est **un rectangle**. |  | La section d'un parallélépipède rectangle par **un plan parallèle à une arête** est **un rectangle**. |  |
| La section d'un cylindre par **un plan parallèle à la base** est **un disque** de même rayon que la base. |  | La section d'un cylindre **par un plan parallèle à l'axe du cylindre** est **un rectangle**. |  |
| La section d'une pyramide par **un plan parallèle à sa base** est **un polygone** de même nature que la base. |  | La section d'un cône par **un plan parallèle à sa base** est **un disque**. |  |

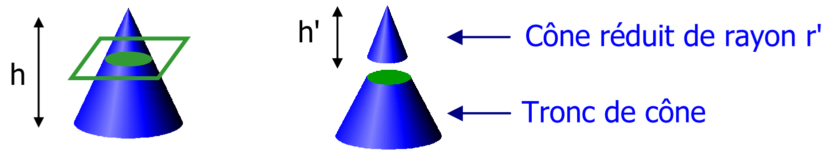
# 21 - Cône et pyramide agrandissement - réduction - section par un plan

**Rappel** : dans une situation d'agrandissement - réduction de rapport k :

- Les **aires** sont multipliées par $\mathbf{k^2}$
- les **volumes** sont multipliés par $\mathbf{k^3}$.

## 1. Cône

Lorsqu'on coupe un cône par un plan parallèle à sa base, on obtient un petit cône et un tronc de cône.




**Le petit cône est une réduction du grand cône de rapport $\frac{h'}{h}$ ou $\frac{r'}{r}$**

**Volume du petit cône = Volume du grand cône $\times \left(\frac{h'}{h}\right)^3$**

**Volume du petit cône = Volume du grand cône $\times \left(\frac{r'}{r}\right)^3$**

**Exemple avec la hauteur :** Un cône a un volume V de 30 cm$^3$ et une hauteur de 4 cm. On le coupe par un plan parallèle à la base et on obtient un petit cône de hauteur 1 cm. Calculer le volume V' du petit cône.

Le petit cône est une réduction du premier cône de rapport $\frac{h'}{h} = \frac{1}{4}$. Donc $V' = V \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$

$V' = 30 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3$ $\quad V' = 30 \times \frac{1}{64}$ $\quad V' = \frac{30}{64}$ $\quad V' = \frac{15}{32}$ $\quad \boxed{V' = 0{,}46875 \text{ cm}^3}$

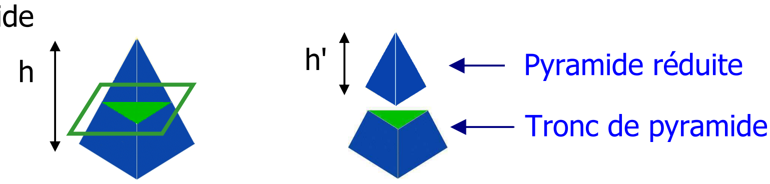
**Exemple avec le rayon :** Un cône a un volume V de 50 cm$^3$ et un rayon de 4 cm. On le coupe par un plan parallèle à la base et on obtient un petit cône de rayon 2 cm. Calculer le volume V' du petit cône.

Le petit cône est une réduction du premier cône de rapport $\frac{r'}{r} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Donc $V' = V \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$V' = 50 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad V' = 50 \times \frac{1}{8}$ $\quad V' = \frac{50}{8}$ $\quad V' = \frac{25}{4}$ $\quad \boxed{V' = 6{,}25 \text{ cm}^3}$

## 2. Pyramide

Lorsqu'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base, on obtient une petite pyramide et un tronc de pyramide




**La petite pyramide est une réduction de la grande pyramide de rapport $\frac{h'}{h}$**

**Volume de la petite pyramide = Volume de la grande pyramide $\times \left(\frac{h'}{h}\right)^3$**

**Exemple :** Une pyramide a un volume V de 50 cm$^3$ et une hauteur de 5 cm. On la coupe par un plan parallèle à la base et on obtient une petite pyramide de hauteur 1 cm. Calculer le volume V' de la petite pyramide.

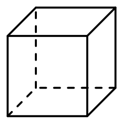
La petite pyramide est une réduction de la première pyramide de rapport $\frac{1}{5}$.

Donc $V' = V \times \left(\frac{1}{5}\right)^3$ $\quad V' = 50 \times \frac{1}{125}$ $\quad V' = \frac{50}{125}$ $\quad V' = \frac{2}{5}$ $\quad \boxed{V' = 0{,}4 \text{ cm}^3}$

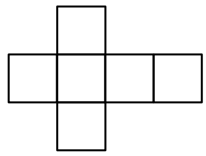
# 22 - Patrons de solides – Volumes

**Solides "droits" : volume = aire de la base × hauteur**

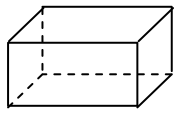
Cube
en perspective



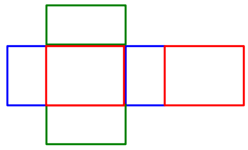
Patron
d'un cube



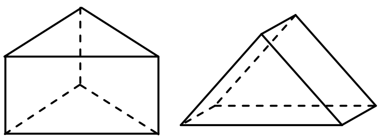
Pavé ou parallélépipède
rectangle en perspective



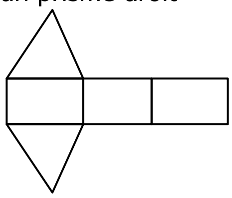
Patron
d'un pavé



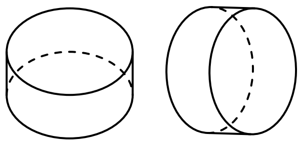
Prisme droit
en perspective



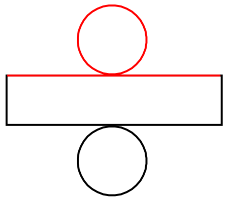
Patron
d'un prisme droit



Cylindre
en perspective

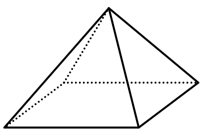


Patron
d'un cylindre

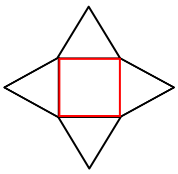


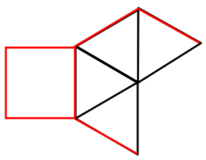
**Solides "pointus" : volume =** $\dfrac{\textbf{aire de la base} \times \textbf{hauteur}}{\mathbf{3}}$

Pyramide
en perspective

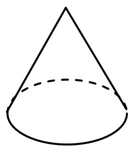


Patron
d'une pyramide

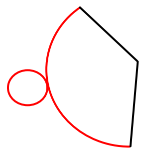




Cône
en perspective



Patron
d'un cône



# 23 - EQUATIONS-PRODUIT

**Définition** Une **équation-produit** est une équation de la forme **$A \times B = 0$**.

**Propriété** **Si un produit est nul alors au moins l'un des facteurs est nul.**

ou bien **Si $A \times B = 0$ alors $A = 0$ ou $B = 0$.**

**Exemple :** Résoudre **$(7x - 5)(x + 4) = 0$.**

Si **$A \times B = 0$** alors **$A = 0$ ou $B = 0$.**

**$7x - 5 = 0$** **ou** **$x + 4 = 0$**

$7x = 5$ | $x = \boxed{-4}$

$x = \boxed{\frac{5}{7}}$

**L'équation** a **2 solutions** :

$\boxed{\frac{5}{7} \text{ et } -4}$

# 24 - EQUATIONS DE LA FORME $x^2 = a$

**Propriété** **Le nombre de solutions** de l'équation $x^2 = a$ dépend **du signe du nombre** $a$.

- Si $a > 0$ alors l'équation $x^2 = a$ **a deux solutions :** $\sqrt{a}$ **et** $-\sqrt{a}$
- Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = 0$ **a une seule solution : 0**
- Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ **n'a pas de solution.**

Exemples :

**1)** L'équation $x^2 = 11$ a **deux solutions** : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$.

**2)** L'équation $x^2 = 49$ a **deux solutions** : $\sqrt{49}$ et $-\sqrt{49}$, donc **7** et **-7**

**3)** L'équation $x^2 = -16$ **n'a pas de solution** car **-16 est négatif**.

**Remarque :** Quand on résout une équation, on donne les **valeurs exactes** des solutions.

# 25 - RACINES CARRES : DEFINITION

5 25

**25 est le carré de 5**

**5 est la racine carrée de 25** $\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{\ }$ s'appelle le radical et $\sqrt{a}$ se lit « racine carrée de a » ou « racine de a ».

$\sqrt{-4}$ n'a pas de sens car **–4** est un **nombre négatif** :
on ne peut pas trouver de nombre qui multiplié par lui même donne -4.

**Définition** La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est a.

**Autremeent dit :** **Si a > 0** **alors** $\boxed{(\sqrt{a})^2 = a}$

$\boxed{(\sqrt{5})^2 = 5}$

**Prendre la racine puis élever au carré revient à ne rien faire.**

**Propriété** Pour **tout nombre positif a**, on a : $\boxed{\sqrt{a^2} = a}$.

$\boxed{\sqrt{8^2} = 8}$

**Elever au carré puis prendre la racine revient à ne rien faire.**

# CARRES PARFAITS

**Définition** On appelle **carré parfait** un entier positif dont **la racine carrée est un entier.**

**A savoir par coeur**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **On prend la racine carrée** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **On met au carré** | **1** | **4** | **9** | **16** | **25** | **36** | **49** | **64** | **81** | **100** |

Pour savoir si un nombre plus compliqué est un carré parfait, , on utilise la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la **calculatrice.**

# OPERATIONS SUR LES RACINES CARREES

## 1. Produit

**Règle :** Pour tous les nombres positifs a et b, on a : $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}}$

**A savoir par coeur**

Exemples : • $\sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = \boxed{8}$ • $\sqrt{81 \times 25} = \sqrt{81} \times \sqrt{25} = 9 \times 5 = \boxed{45}$

## 2. Quotient

**Règle :** Pour tous les nombres positifs a et b, avec b ≠ 0, on a : $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

**A savoir par coeur**

Exemples : • $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\dfrac{48}{12}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$ • $\sqrt{\dfrac{64}{49}} = \dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}} = \boxed{\dfrac{8}{7}}$

## 3. Somme et différence

**Il n'y a aucune règle pour la somme et la différence de deux racines carrées**

**Exemples :** $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = \boxed{7}$ mais $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = \boxed{2}$ mais $\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = \boxed{4}$

$\sqrt{36} - \sqrt{100} = 6 - 10 = \boxed{-4}$ mais l'écriture $\sqrt{36 - 100}$ n'a pas de sens car 36 - 100 = **-64**

**A savoir par coeur**

# CALCULS COMPORTANT DES RACINES CARREES

## 1. Ecrire un radical sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible

Exemple : $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3}$

plus grand carré parfait possible

$= \sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$= \boxed{5\sqrt{3}}$

## 2. Calculer et réduire une somme algébrique

Exemple 1 : $6\sqrt{7} - 11\sqrt{7} + 3\sqrt{7} =$

$9\sqrt{7} - 11\sqrt{7} = \boxed{-2\sqrt{7}}$

Exemple 2 : $2\sqrt{18} - \sqrt{50} + 3\sqrt{32} =$

$2\sqrt{9} \times \sqrt{2} - \sqrt{25} \times \sqrt{2} + 3 \times \sqrt{16} \times \sqrt{2} =$

$2 \times 3 \times \sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3 \times 4 \times \sqrt{2} =$

$6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = \boxed{13\sqrt{2}}$

## 3. Développer et réduire un produit

**Avec la distributivité simple :**

$\sqrt{7}\,(2 + \sqrt{7}) = 2\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2$

$= \boxed{2\sqrt{7} + 7}$

**Avec la double distributivité :**

$(\sqrt{2} + 3)(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 + 3 - 3\sqrt{2}$

$= \sqrt{2} - 2 + 3 - 3\sqrt{2}$

$= \boxed{1 - 2\sqrt{2}}$

**Avec les identités remarquables :**

Exemple 1 : $(3 - \sqrt{11})^2 = 9 - 6\sqrt{11} + (\sqrt{11})^2$

$= 9 - 6\sqrt{11} + 11$

$= \boxed{20 - 6\sqrt{11}}$

Exemple 2 : $(\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 3) = (\sqrt{5})^2 - 9$

$= 5 - 9$

$= \boxed{-4}$

## 4. Calculer un produit et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible

Exemple : $\sqrt{6} \times \sqrt{18} = \sqrt{3 \times 2} \times \sqrt{9 \times 2}$

$= \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{9} \times \sqrt{2}$

$= \sqrt{3} \times 3 \times (\sqrt{2})^2$

$= \sqrt{3} \times 3 \times 2 = \boxed{6\sqrt{3}}$

# 27 - SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES

## Résolution d'un système par combinaison

**Problème** A la terrasse d'un café :

- Eric et ses amis ont commandé **deux jus d'orange** et **trois chocolats** pour la somme de **11 €**.
- Laure et ses amies ont commandé **quatre jus d'orange** et **un chocolat** pour la somme de **12 €**.
  Quel est le prix d'**un jus d'orange** et celui d'**un chocolat** ?

### Méthode n°1 : par tâtonnements

On peut procéder par essais pour trouver les prix cherchés.

### Méthode n°2 : avec un système de 2 équations à 2 inconnues

① **Choix des inconnues du problème**

- **j** : prix d'**un jus d'orange** (en €)
- **c** : prix d'**un chocolat** (en €)

② **Mise en équation du problème**

- Prix de **2 jus d'orange** et de **3 chocolats** : **11 €** $2j + 3c = 11$
- Prix de **4 jus d'orange** et d'**un chocolat** : **12 €** $4j + c = 12$

**Définition** $\begin{cases} 2j + 3c = 11 \\ 4j + c = 12 \end{cases}$ est un **système de deux équations à deux inconnues j** et **c**.

**Résoudre** ce système, **c'est trouver le prix du jus d'orange j** et **le prix du café c** qui vérifient à la fois **les deux équations**.

**Principe de la méthode par combinaison**

**Multiplier l'une ou les deux équations par des nombres** convenablement choisis de façon **à éliminer l'une des inconnues** par **soustraction membre à membre des deux équations**.

③ **Résolution du système :** $\begin{cases} 2j + 3c = 11 \\ 4j + c = 12 \end{cases}$

**Calcul de j** (On élimine **c**)
On multiplie la 2ème équation par 3

$\begin{cases} 2j + 3c = 11 \\ 12j + 3c = 36 \end{cases}$

$$\begin{array}{rrl} & 12j + 3c & = 36 \\ - & 2j + 3c & = 11 \\ \hline & 10j & = 25 \end{array}$$

En plaçant les 2 équations dans cet ordre, la soustraction est plus facile.

$$j = \frac{25}{10}$$

$$j = \boxed{2,5}$$

**Calcul de c** (On élimine **j**)
On multiplie la 1ère équation par 2

$$\begin{array}{rrl} & 4j + 6c & = 22 \\ - & 4j + c & = 12 \\ \hline & 5c & = 10 \end{array}$$

$$c = \frac{10}{5}$$

$$c = \boxed{2}$$

**Vérification :** Prix de **2 jus d'orange** et de **3 chocolats** : $2 \times 2,5 + 3 \times 2 = 5 + 6 = 11$
(facultative) Prix de **4 jus d'orange** et d'**un chocolat** : $4 \times 2,5 + 2 = 10 + 2 = 12$

④ **Conclusion :** Le **prix d'un jus d'orange** est **2,50 €** et **celui d'un chocolat** est **2 €**.

# 28 - SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES - PARTIE 2

## Résolution d'un système par substitution

**Problème :** **Quatre diabolos** menthe et **un soda** coûtent **7,50 €**.
**Un soda** coûte **deux fois plus cher qu'un diabolo menthe**.
Trouver le prix **d'un soda** et **d'un diabolo menthe**.

### Méthode n°1 : par tâtonnements

On peut procéder par essais pour trouver les prix cherchés.

### Méthode n°2 : avec un système de 2 équations à 2 inconnues

① **Choix des inconnues du problème**

- **d**: prix d'**un diabolo** (en €)
- **s** : prix d'**un soda** (en €)

② **Mise en équation du problème**

- Prix de **4 diabolos menthe** et de **1 soda** : **7,50 €** $\quad 4d + s = 7{,}50$
- Un **soda** coûte deux fois plus cher qu'un **diabolo menthe** : $\quad s = 2d$

**Principe de la méthode par substitution**

**Exprimer l'une des deux inconnues en fonction de l'autre** à l'aide de l'une des équations, puis **reporter l'expression obtenue dans l'autre équation**.

Souvent, comme dans cet exemple, une inconnue est tout de suite exprimée en fonction de l'autre.

③ Résolution du système :

$$\begin{cases} 4d + s = 7{,}50 \\ s = 2d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4d + 2d = 7{,}50 \\ s = 2d \end{cases}$$

On remplace **s** par **2d** dans la 1ère équation.

**Calcul de d :**

$$6d = 7{,}50$$

$$d = \frac{7{,}50}{6}$$

$$d = 1{,}25$$

**Calcul de s :**

$$s = 2d$$

$$s = 2 \times 1{,}25$$

$$s = 2{,}50$$

**Vérification :** $4 \times 1{,}25 + 2{,}50 = 5 + 2{,}50 = 7{,}50$
(facultative) **2,5** est le double de **1,25**

**Conclusion :** La solution du système est **(1,25 ; 2,50)**.
Le **prix d'un diabolo menthe** est **1,25 €** et **celui d'un soda** est **2,50 €**.

# 29 - ANGLE INSCRIT – ANGLE AU CENTRE

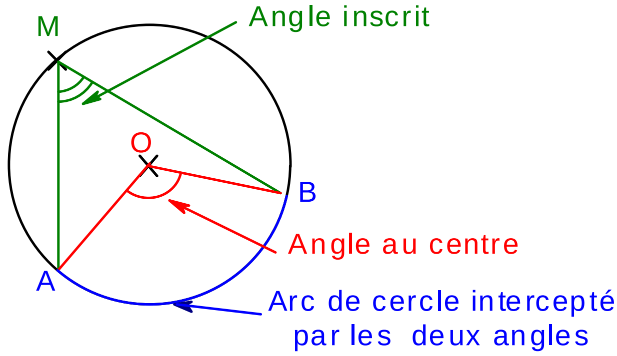
## 1. Vocabulaire

**Définitions**

$\widehat{AMB}$ est un **angle inscrit** dans le cercle car **A**, **B** et **M** sont sur le cercle.

On dit que l'angle $\widehat{AMB}$ **intercepte l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$**.

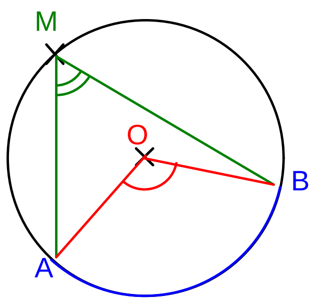
$\widehat{AOB}$ est un **angle au centre** car son sommet est le centre du cercle.
Il est associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ car **il intercepte le même arc**.



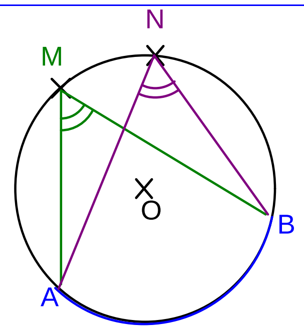

## 2. Propriétés

**Propriété de l'angle inscrit** Dans un cercle, si **un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc** alors **la mesure de l'angle inscrit est égale à la moitié de l'angle au centre**.

**Propriété** Si **deux angles inscrits interceptent le même arc** alors **ils ont la même mesure**.




$\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\ \widehat{AOB}$




$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$

# 30 - POLYGONES REGULIERS

## 1. Définition

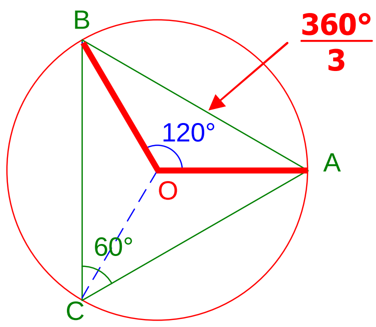
Un **polygone régulier** est un **polygone** dont **tous les côtés ont la même longueur** et dont **tous les angles ont la même mesure**.

Exemples : - Un **triangle équilatéral** est un polygone régulier à **trois côtés**.
- Un **carré** est un polygone régulier à **quatre côtés**.

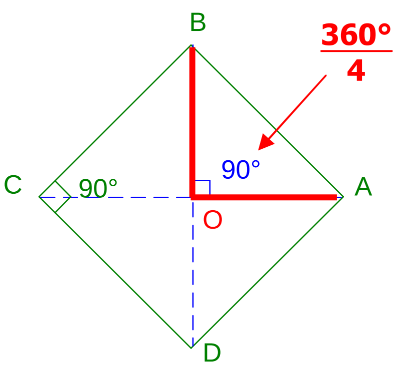
## 2. Propriétés

**1.** Si **un polygone est régulier** alors **ses sommets sont sur un même cercle de centre O**.
On dit que le cercle est **circonscrit** au polygone et que O est le **centre** de ce polygone.

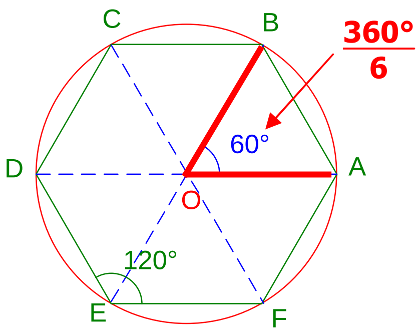
**2. Les angles au centre ont la même mesure égale à** $\dfrac{\mathbf{360°}}{\textbf{nombre de côtés}}$.




Triangle équilatéral




Carré




Hexagone régulier

# 31 - FONCTIONS AFFINES, LINEAIRES et CONSTANTES

## 1. Définition d'une fonction affine

Une **fonction affine** est **un procédé de calcul**.
On note en général cette fonction ***f*** et on écrit ***f*** **:** $x$ **➔ a$x$ + b**
**Les nombres a et b sont les coefficients de la fonction affine.**
On peut écrire aussi $\boxed{f(x) = ax + b}$ (se lit "f de $x$")

Exemple : **f($x$) = 3$x$ + 20**
Cette fonction affine représente la somme dépensée en fonction du nombre d'entrées avec le tarif suivant : une carte d'abonnement coûte 20 € ; ensuite chaque entrée coûte 3 €.

## 2. Cas particuliers importants : fonction linéaire et fonction constante

| *Cas où b = 0* | *Cas où a = 0* |
|---|---|
| $\boxed{f(x) = ax}$ <br> **Cette fonction** s'appelle une **fonction linéaire** et correspond à **une situation de proportionnalité**. | $\boxed{f(x) = b}$ <br> **Cette fonction** s'appelle une **fonction constante**. |
| Exemple : $f(x) = 5x$ <br> Cette fonction linéaire représente la somme dépensée en fonction du nombre d'entrées avec le tarif suivant : chaque entrée coûte 5 €. | Exemple : $f(x) = 65$ <br> Cette fonction constante représente la somme dépensée en fonction du nombre d'entrées avec le tarif suivant : une carte d'abonnement coûte 65 € ; ensuite le nombre d'entrées est illimité. |

## 3. Représentation graphique d'une fonction affine

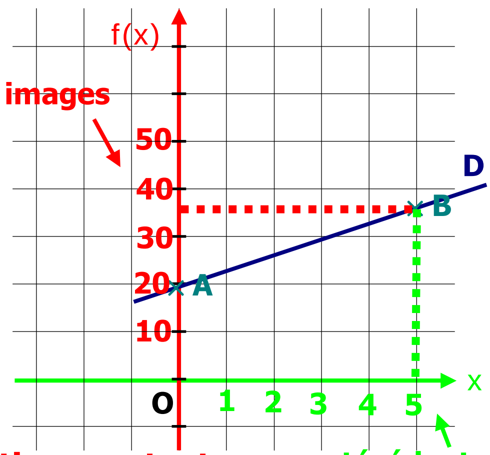
**Propriété** **La représentation graphique** d'une **fonction affine** est **une droite**.

Exemple : f : x ↦ **3x+ 20**
Pour tracer **cette droite**, il faut **2 points**.

| $x$ | 0 | 5 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 20 | 35 |

*On choisit **2 valeurs** de x « au hasard », par exemple : **0** et **5** et on complète le tableau de valeurs*

**La représentation graphique** de f est **la droite D** passant par **les points A** (**0** ; **20**) et **B** (**5** ; **35**).

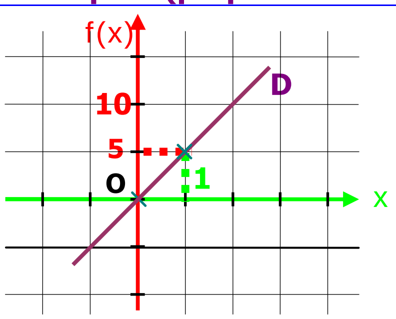



## 4. Cas particuliers importants : fonction linéaire et fonction constante

| **Fonction linéaire** : $\boxed{f(x) = ax}$ | **Fonction constante** : $\boxed{f(x) = b}$ |
|---|---|
| **La représentation graphique** d'une **fonction linéaire** est **une droite** qui passe par **l'origine du repère (proportionnalité)** | **La représentation graphique** d'une **une fonction constante** est **une droite parallèle à l'axe des abscisses**. |

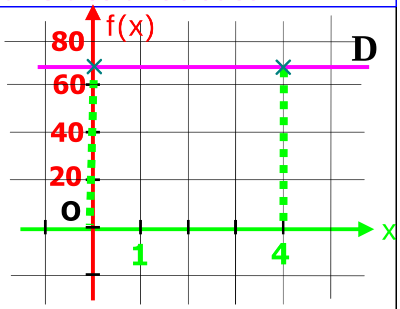
Exemple : $f(x) = 5x$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 5 |




Exemple : $f(x) = 65$

| $x$ | 0 | 4 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 65 | 65 |

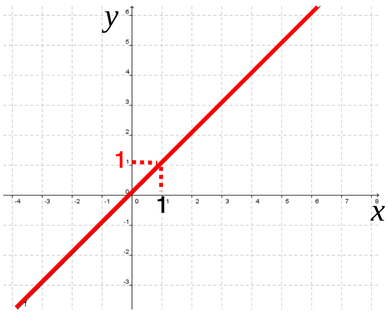


# 32 - COEFFICIENTS D'UNE FONCTION AFFINE

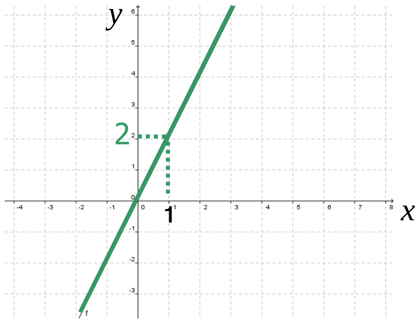
## 1. Représentation graphique d'une fonction affine et coefficients

**Cas particulier d'une fonction linéaire**

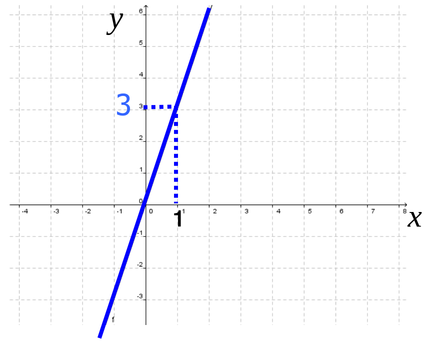
**f($x$) = 1$x$**
*Quand x augmente de 1,*
*y augmente de 1*




**g($x$) = 2$x$**
*Quand x augmente de 1,*
*y augmente de 2*




**h($x$) = 3$x$**
*Quand x augmente de 1,*
*y augmente de 3*

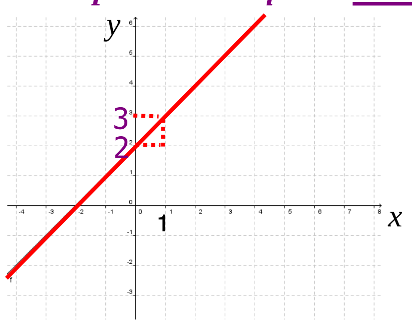


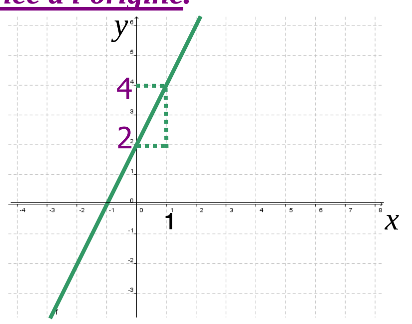

Cas général

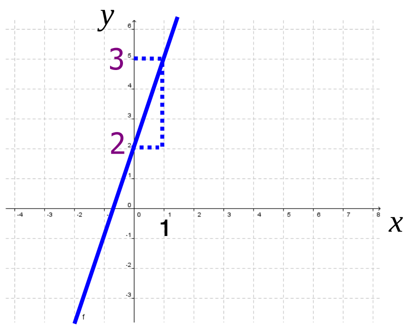
Coefficient directeur

**f($x$) = 1**$x + 2$ **g($x$) = 2**$x + 2$ **h($x$) = 3**$x + 2$

*Le principe est le même, quand x augmente de 1, y augmente de 1, 2 ou 3 comme ci-dessus,*
***mais en partant de 2 qui est l'ordonnée à l'origine.***




**Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur.**

## 2. Calculer les coefficients d'une fonction affine

Déterminer **le coefficient $a$** de **la fonction linéaire $f$** telle que $f(4) = 12$.

C'est une fonction linéaire, donc **f($x$) = a$x$**

$f(4) = a \times 4$

donc $a \times 4 = 12$

donc $a = \boxed{\dfrac{12}{4}} = \boxed{3}$

donc $\boxed{f(x) = 3x}$

Déterminer **le coefficient $a$** de **la fonction linéaire $f$** telle que $f(3) = 5$.

C'est une fonction linéaire, donc **f($x$) = a$x$**

$f(3) = a \times 3$

donc $a \times 3 = 5$

donc $a = \boxed{\dfrac{5}{3}}$

donc $\boxed{f(x) = \dfrac{5}{3}x}$

Déterminer **les coefficients $a$ et $b$** de **la fonction affine $f$** telle que : $f(2) = 5$ et $f(4) = 11$.

C'est une fonction affine, donc **f($x$) = a$x$ + b**

$f(2) = 5$ donc $a \times 2 + b = 5$
$f(4) = 11$ donc $a \times 4 + b = 11$

Pour trouver $a$ et $b$, on résout le système d'équations :

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \quad (\times 2) \\ 4a + b = 11 \end{cases}$$

Calcul de $a$ :
(on élimine $b$)

$$\begin{array}{rcl} 4a + b &=& 11 \\ 2a + b &=& 5 \\ \hline 2a &=& 6 \end{array}$$

$a = \dfrac{6}{2}$ $a = \boxed{3}$

Calcul de $b$ :
(On élimine $a$)

$$\begin{array}{rcl} 4a + 2b &=& 10 \\ 4a + b &=& 11 \\ \hline b &=& \boxed{-1} \end{array}$$

$\boxed{f(x) = 3x - 1}$

# 33 - SECURITE ROUTIERE : VITESSE ET DISTANCES

## 1. Distance parcourue pendant le temps de réaction

Un conducteur surpris par un événement imprévu ne modifie pas instantanément la conduite de son véhicule, il le fait avec un temps de retard. **Ce retard** s'appelle **le temps de réaction**.
Sa durée est de **1 à 2s.**
**Le temps de réaction dépend de l'état du conducteur : il sera augmenté par l'alcool, certains médicaments, la fatigue, la distraction…**

## 2. Distance de freinage

Il est impossible d'arrêter un véhicule instantanément.

**La distance de freinage** est **la distance nécessaire pour immobiliser le véhicule** à l'aide des freins.
**La distance de freinage dépend de l'état de la route et de l'état du véhicule**

## 3. Distance d'arrêt

**distance d'arrêt = distance parcourue pendant le temps de réaction + distance de freinage**

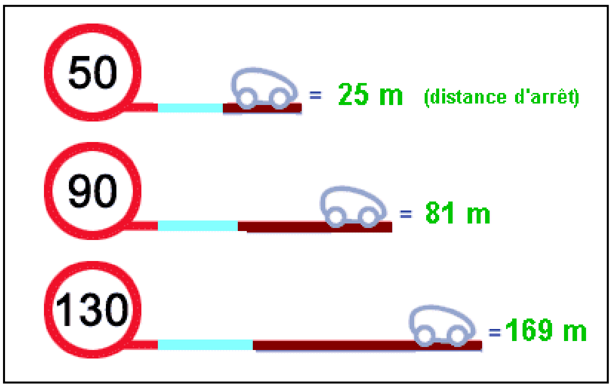
**dépend de l'état du conducteur** — **dépend de l'état de la route et de l'état du véhicule**

On peut obtenir de manière assez rapide et approximative **la distance d'arrêt en multipliant le nombre de dizaines de la vitesse par lui-même**.

**Ex : vitesse 90 km.h$^{-1}$**

**Distance d'arrêt : 9 × 9 = $\boxed{81 \text{ m}}$**

Le **nombre de dizaines** est **9**.




## 4. Distance de sécurité

**La distance de sécurité** est **l'espace qu'il faut garder avec le véhicule qui nous précède** afin d'avoir le temps de réagir.

Entre deux véhicules, il faut garder une distance équivalente à **deux traits de marquage sur la bande d'arrêt d'urgence .**


## 5. Vitesse maximale autorisée

Sur le réseau routier français, la **vitesse maximale autorisée** pour **les cyclomotoristes** est de **45 km.h$^{-1}$** .

## 6. Quantité maximum d'alcool dans le sang : 0,5 g.L$^{-1}$

**Un verre de vin, une bouteille de bière, un apéritif, un digestif servis dans un café sont équivalents.** Ils correspondent tous à environ **0,2 g d'alcool par litre de sang** (cela dépend s'il s'agit d'un homme ou une femme et de son poids).

**On ne modifie pas le taux d'alcool dans le sang en mélangeant l'alcool** avec des jus de fruits, de l'eau… ou en buvant de l'eau en alternance.

# 34 - FONCTIONS AFFINES Calcul d'image et d'antécédent

## 1. Calcul d'image

| On considère la **fonction affine** $f$ telle que $f(x) = 7x + 9$ | |
|---|---|
| **Image** de **3** ou f(3) : on remplace $x$ **par 3.**<br>$7 \times 3 + 9 = 21 + 9 = 30$<br>**f(3) = 30** | **Image** de **-1** ou f(-1) : on remplace $x$ **par -1.**<br>$7 \times (-1) + 9 = -7 + 9 = 2$<br>**f(-1) = 2** |

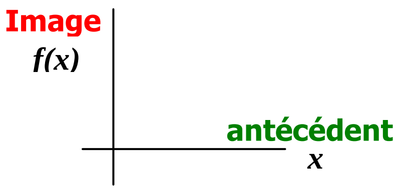
## 2. Calcul d'antécédent

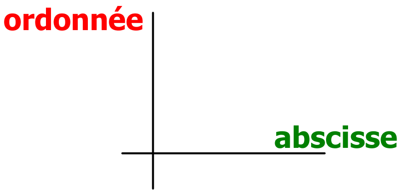
**Vocabulaire** **Le nombre de départ** $x$ s'appelle **l'antécédent**.

**Pour calculer un antécédent, il faut résoudre une équation afin de trouver $x$ :**

| Fonction affine | Fonction linéaire |
|---|---|
| On considère la **fonction affine f** telle que $f(x) = 2x + 3$ | On considère la **fonction affine f** telle que $f(x) = 5x$ |
| Calculer **l'antécédent** de **-1** par f<br>$2x + 3 = -1$<br>$2x = -4$<br>$x = \frac{-4}{2} = -2$ | Calculer **l'antécédent** de **3** par f<br>$5x = 3$<br>$x = \frac{3}{5} = 0{,}6$ |

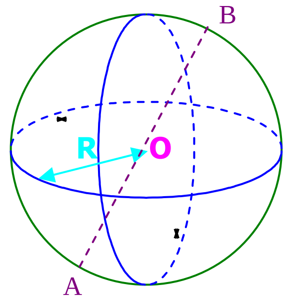
## 3. Graphiquement :



# 35 - LA SPHERE

## 1. Définitions




- La **sphère** de **centre O** et de **rayon R** est l'ensemble des points M de l'espace tels que **OM = R**
- La **boule** de **centre O** et de **rayon R** est l'ensemble des points M de l'espace situés **à une distance de O inférieure ou égale à R** : **OM** $\leq$ **R**
- Un **grand cercle** d'une sphère de **centre O** et de **rayon R** est **un cercle** de **centre O**.
- Les points **A** et **B** sont **diamétralement opposés**.
- La **latitude** Nord ou Sud d'un point se mesure par sa position sur un **parallèle** par rapport à **l'équateur**.
- La **longitude** Est ou Ouest d'un point se mesure par sa position sur un **méridien** par rapport au **méridien de Greenwich**.

## 2. Aire d'une sphère

**Propriété** L'**aire d'une sphère** de **rayon R** est **$A = 4\pi R^2$**

Exemple : Calculer l'aire d'une sphère de rayon 5 cm.

$A = 4\pi \times 5^2 = 4\pi \times 25 = \boxed{100\pi \text{ cm}^2}$

## 3. Volume d'une boule

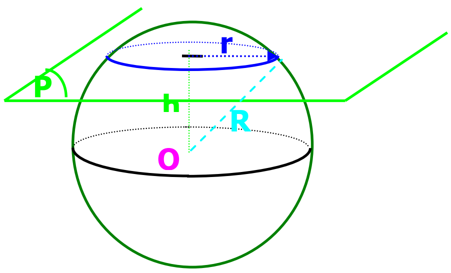
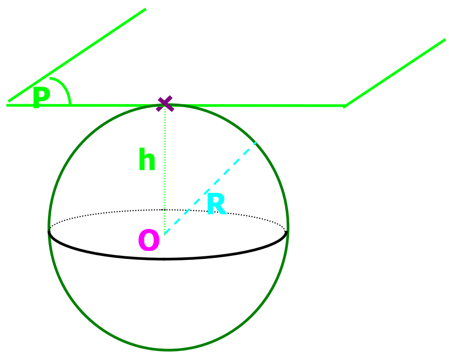
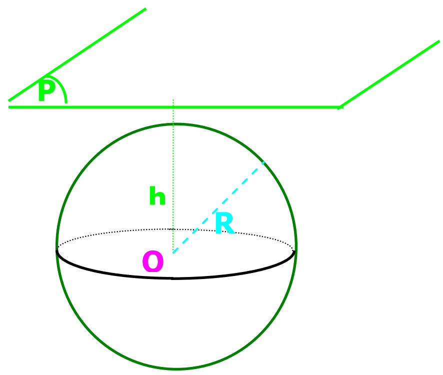
**Propriété** Le **volume** d'**une boule** de **rayon R** est : $V = \dfrac{4\pi R^3}{3}$

Exemple : Calculer le volume d'une boule de rayon 5 cm.

$V = \dfrac{4\pi \times 5^3}{3} = \dfrac{4\pi \times 125}{3} = \boxed{\dfrac{500\pi}{3} \text{ cm}^3}$

## 4. Section d'une sphère par un plan

**Propriété** La **section** d'**une sphère** par **un plan** est **un cercle**. (voir cas ① ci-dessous)

| **Cas ① : h $\leq$ R** | **Cas ② : h = R** | **Cas ③ : h > R** |
|---|---|---|
| La **section** d'**une sphère** par **un plan P** est **un cercle**.<br><br>Calcul du **rayon r de la section** :<br>**$r^2 + h^2 = R^2$** | **La sphère** et **le plan P ont un seul point commun.**<br><br>On dit que **le plan P est tangent** à **la sphère**. | **La sphère** et **le plan P n'ont aucun point commun**.<br> |

# 36 - Fonctions affines - Exemple d'exercice - Enoncé

Un club de gymnastique propose, pour l'utilisation de ses installations, les trois tarifs suivants :

- **Tarif A** : 12 € par séance.
- **Tarif B** : abonnement annuel de 150 €, puis 6 € par séance.
- **Tarif C** : forfait annuel de 450 € donnant droit à autant de séances que l'on désire.

**<u>Première partie</u>** **1. Compléter le tableau suivant :**

| Nombre de séance annuelles | 10 | 40 | 60 |
|---|---|---|---|
| Coût en € avec le tarif A | | | |
| Coût en € avec le tarif B | | | |
| Coût en € avec le tarif C | | | |

**2.** On appelle $x$ le nombre de séances annuelles.

**a)** Exprimer en fonction de $x$ le coût payé avec le tarif A noté $f(x)$. Quelle la nature de la fonction $f$ ?

**b)** Exprimer en fonction de $x$ le coût payé avec le tarif B noté $g(x)$. Quelle la nature de la fonction $g$ ?

**3.** Une personne désire dépenser 360 € dans l'année pour l'utilisation des installations de ce club. A combien de séances aura-t-elle droit si elle choisit **a)** le tarif A ? **b)** le tarif B ?

**4.** **a)** Résoudre l'équation : $12x = 6x + 150$

**b)** Interpréter le résultat.

**<u>Deuxième partie</u>** Sur une feuille de papier millimétré, tracer un repère orthogonal en plaçant l'origine du repère en bas à gauche de la feuille et en graduant les axes de la manière suivante :

- sur l'axe des abscisses : 1 cm pour 5 séances.
- sur l'axe des ordonnées : 1 cm pour 30 €.

**1.** Représenter graphiquement les fonctions $f$, $g$ et $h$ suivantes :

$f : x \mapsto 12x$ $\qquad g : x \mapsto 6x + 150$ $\qquad h : x \mapsto 450$

**2.** On répondra aux différentes questions **en utilisant le graphique**. Une personne dispose de 240 € pour l'utilisation des installations de ce club. Déterminer graphiquement le nombre de séances auxquelles elle pourra participer : **a)** avec le tarif A ? **b)** avec le tarif B ?

**3.** Déterminer graphiquement, selon le nombre de séances annuelles, le tarif le plus avantageux.

# 37 – Fonctions affines – Exemple d'exercice - Correction

## Première partie

| **1.** Nombre de séance annuelles | 10 | 40 | 60 |
|---|---|---|---|
| Coût en € avec le tarif A | **120** | **480** | **720** |
| Coût en € avec le tarif B | **210** | **390** | **510** |
| Coût en € avec le tarif C | **450** | **450** | **450** |

**2. a)** le coût payé avec le tarif A noté $f(x)$ :
**$f(x) = 12x$** $f$ est **une fonction linéaire**.

**b)** le coût payé avec le tarif B noté $g(x)$ :
**$g(x) = 6x + 150$** $g$ est **une fonction affine**.

**3.** Une personne désire dépenser 360 € dans l'année pour l'utilisation des installations de ce club.
A combien de séances aura-t-elle droit si elle choisit

**a)** le tarif A ? **$12x = 360$**

$x = \dfrac{360}{12}$ $x = \boxed{30}$

**b)** le tarif B ? **$6x + 150 = 360$**

$6x = 210$ $x = \dfrac{210}{6} = \boxed{35}$

**4. a)** Résoudre l'équation : $12x = 6x + 150$

**$12x = 6x + 150$**

$6x = 150$ $x = \dfrac{150}{6}$ $x = \boxed{25}$

**b)** Interpréter le résultat.

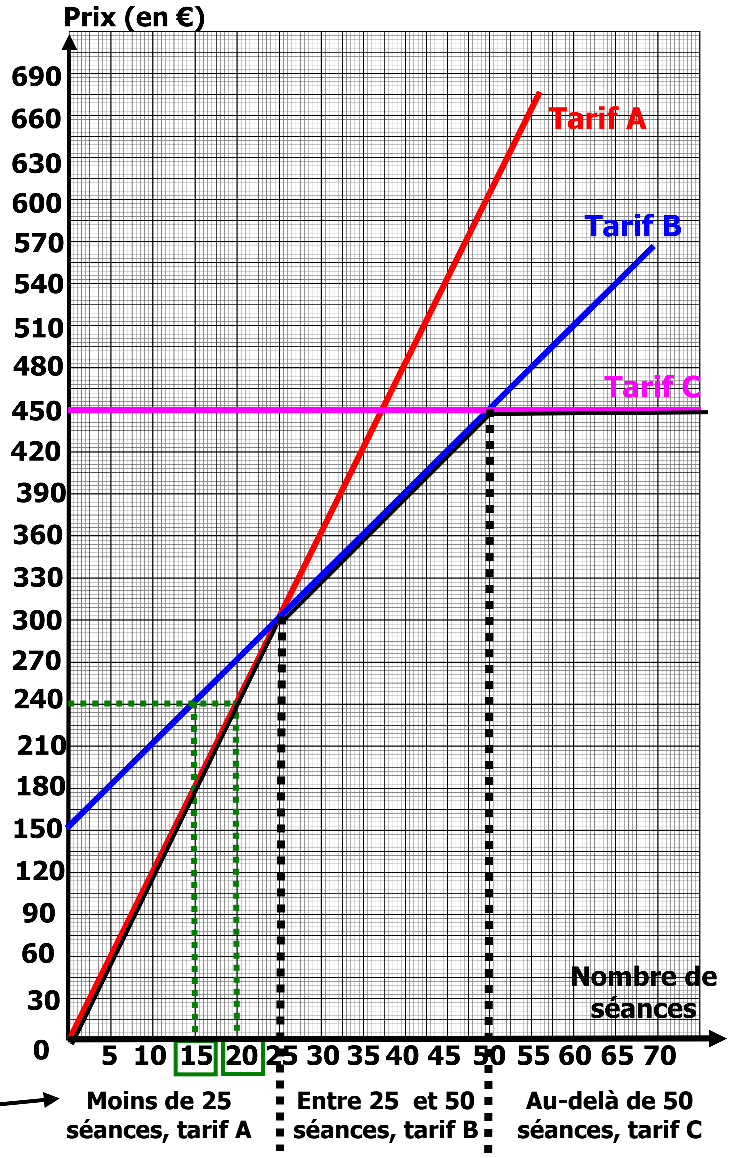
Pour **25 utilisations** des installations du club de gymnastique,
**le tarif A** et **le tarif B sont les mêmes**.

## Deuxième partie

| **a)** $f : x \mapsto 12x$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | **10** | **40** |
| $f(x)$ | **120** | **480** |
| **b)** $g : x \mapsto 6x + 150$ | | |
| $x$ | **10** | **20** |
| $g(x)$ | **210** | **270** |
| **c)** $h : x \mapsto 450$ | | |
| $x$ | **10** | **30** |
| $h(x)$ | **450** | **450** |

*On choisit n'importe quel nombre pour x, mais des nombres faciles à placer et suffisamment éloignés.*

*On vérifie que la droite qui représente f passe par l'origine et que celle qui représente g coupe l'axe des ordonnées en 150.*




**2.** Une personne dispose de 240 € pour l'utilisation des installations de ce club.
Déterminer graphiquement le nombre de séances auxquelles elle pourra participer :

**a)** le tarif A ? **20 séances**

**b)** le tarif B ? **15 séances**

(les tracés sont en vert sur le graphique)

**3.** Déterminer graphiquement, selon le nombre de séances annuelles, le tarif le plus avantageux :

**Le tarif A** est plus avantageux **pour moins de 25 séances d'utilisation**.
**Le tarif B** est plus avantageux **entre 25 et 50 séances d'utilisation**.
**Le tarif C** est plus avantageux **au-delà de 50 séances d'utilisation**

Ne pas oublier les tracés sur le graphique

# 38 - POURCENTAGES (exercices en activités rapides)

**30%** se lit : "**30 pour cent**" et s'écrit également $\frac{30}{100}$.

Une remise de **30%** signifie que sur un article qui coûte **100 €**, on obtient une remise de **30 €**.

## 1. Appliquer un pourcentage

**Calculer 30% d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\frac{30}{100}$.**

**Exemple** : Dans une classe, **30%** des élèves portent des lunettes.
Sachant qu'il y a **20** élèves dans cette classe, combien portent des lunettes ?

$20 \times \frac{30}{100} = 6$ **6 élèves** portent des lunettes.

## 2. Calculer un pourcentage

**Exemple 1** : Dans une boîte de **20 gâteaux**, il y a **7 gâteaux au chocolat**.
Quel est le **pourcentage** de gâteaux au chocolat ?

**7 gâteaux** sur **20** $\longrightarrow \frac{7}{20}$ $\frac{7}{20} = \frac{35}{100}$ Il y a **35%** de **gâteaux au chocolat.**

**Exemple 2** : **15 élèves** d'une classe sont **externes**. Il y a **28 élèves dans la classe**.
Quel est le **pourcentage** d'élèves **externes** dans cette classe ?

**15 élèves sur 28** $\longrightarrow \frac{15}{28}$ $\frac{15}{28} \approx$ **53,57...** **Environ 54% des élèves sont externes.**

Remarque : On effectue la division car on ne peut pas écrire facilement $\frac{15}{28}$ avec le dénominateur 100.

## 3. Trouver un prix après une augmentation ou une réduction

**Exemple** : Mon loyer était de **400 €**. **Il augmente de 3%**. Combien vais-je payer par mois ?

**Montant de l'augmentation** :
$400 \times \frac{3}{100} = 12$

**Prix après augmentation** :
$400 + 12 = \boxed{412\text{ €}}$

**Méthode avec une fonction linéaire :**

Nouveau prix = ancien prix $\times \frac{103}{100}$ ou Nouveau prix = ancien prix $\times$ 1,03 ou $f(x) = 1{,}03\,x$

## 4. Trouver un ancien prix (avant une augmentation ou une réduction)

**Exemple** : Un magasin **fait des soldes de 30%**.
Quel est **l'ancien prix** d'un DVD qui coûte **14 €** lorsqu'il est soldé ?

Pour un **ancien prix** de **100 €**, **la réduction** est de **30 €** et **le nouveau prix** est **70 €**.

| | | |
|---|---|---|
| **Ancien prix** | **100** | $x$ |
| **Nouveau prix** | **70** | **14** |

donc $x = \frac{100 \times 14}{70} = \frac{1400}{70} = \boxed{20\text{ €}}$

**Méthode avec une fonction linéaire :**

Nouveau prix = ancien prix $\times \frac{70}{100}$ ou Nouveau prix = ancien prix $\times$ 0,70 ou $f(x) = 0{,}70\,x$

Donc ancien prix = $\frac{\text{nouveau prix}}{0{,}70} = \frac{14}{0{,}70} = \frac{1400}{70} =$ **20 €**

## 5. Important

Si un article de 200 € **augmente de 30%** et si on applique **ensuite une réduction de 30%**, on ne retrouve pas le prix de départ.

**Prix après l'augmentation** : **200** + 200 $\times \frac{30}{100}$ = 200 + **60** = **260 €**

**Prix après la réduction** : **260** - 260 $\times \frac{30}{100}$ = 260 - **78** = **182 €**

C'est normal car les 30% sont appliqués à 200 la 1$^{\text{ère}}$ fois alors qu'ils sont appliqués à 260 la 2$^{\text{ème}}$ fois.

# 39 - GRANDEURS COMPOSEES (exercices en activités rapides)

## 1. Grandeur quotient

**Définition** Le **quotient de deux grandeurs de natures différentes** donne une nouvelle grandeur appelée **grandeur-quotient**.

Exemples :

$$\underset{(\text{en km.h}^{-1})}{\text{Vitesse}} = \frac{\overset{(\text{en km})}{\text{Distance}}}{\underset{(\text{en h})}{\text{Temps}}} \qquad \underset{(\text{en hab.km}^{-2})}{\text{Densité}} = \frac{\overset{(\text{en hab})}{\text{Nombred'habitants}}}{\underset{(\text{en km}^2)}{\text{Superficie}}} \qquad \underset{(\text{en m}^3.\text{s}^{-1})}{\text{Débit}} = \frac{\overset{(\text{en m}^3)}{\text{Volume}}}{\underset{(\text{en s})}{\text{Durée}}}$$

Application numérique : Calculer le débit D d'un robinet qui déverse 320 L d'eau en 40 min.

$$D = \frac{320}{40} = \boxed{8 \text{ L.min}^{-1}}$$

## 2. Grandeur produit

**Définition** Le produit **de deux grandeurs (pas nécessairement de natures différentes)** donne une nouvelle grandeur appelée **grandeur-produit**.

Exemples :

$$\underset{(\text{en cm}^2)}{\text{Aire d'un rectangle}} = \underset{(\text{en cm})}{\text{largeur}} \times \underset{(\text{en cm})}{\text{longueur}}$$

$$\underset{(\text{en kW.h})}{\text{Energie électrique}} = \underset{(\text{en kW})}{\text{puissance}} \times \underset{(\text{en h})}{\text{durée}} \qquad \underset{(\text{en voyageurs} \times \text{km})}{\text{Traffic}} = \text{Nombre de voyageurs} \times \underset{(\text{en km})}{\text{distance}}$$

Application numérique : Calculer l'énergie consommée (en kW.h) par une ampoule de puissance 75 W restée allumée pendant un jour.

$$E = 75 \times 24 = 1\,800 \text{ W.h} = \boxed{1{,}8 \text{ kW.h}}$$

# 40 - STATISTIQUES : EFFECTIF - FREQUENCE - DIAGRAMME EN BATONS - MOYENNE - ETENDUE

**Premier type d'organisation**

## 1. Effectifs et fréquences

Considérons les 25 notes d'un contrôle de mathématiques d'une classe de 3ème :

8 – 9 – 14 – 8 – 12 – 9 – 7 – 12 – 9 – 13 – 9 – 11 – 12 – 7 – 9 – 8 – 11 – 8 – 8 – 14 – 10 – 14 – 8 – 13 – 7

| Note | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectif** | 3 | 6 | 5 | 1 | 2 | **3** | 2 | 3 |
| **Effectif cumulé** | 3 | 9 | **14** | 15 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| **Fréquence (%)** | **12** | 24 | 20 | 4 | 8 | 12 | 8 | 12 |
| **Fréquence cumulée (%)** | 12 | 36 | 56 | **60** | 68 | 80 | 88 | 100 |

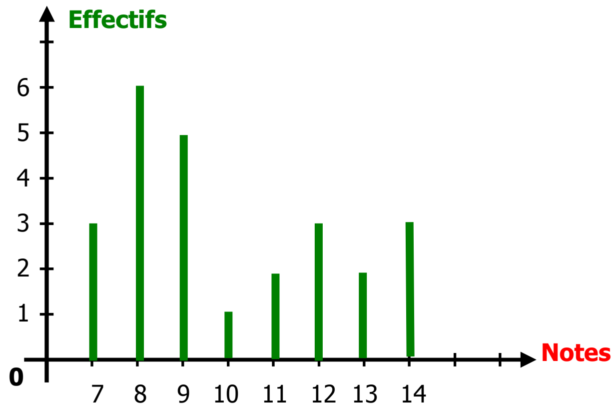
L'**effectif** est le **nombre d'objets** (ou d'individus, …) correspondant à une **caractéristique donnée**.
Exemple : **3 élèves** ont obtenu **la note 12**.

L'**effectif cumulé** d'une valeur est la **somme de tous les effectifs jusqu'à l'effectif de cette valeur**.
Exemple : **14 élèves (3 + 6 + 5 = 14)** ont obtenu **une note inférieure à la moyenne** .

La **fréquence** d'une valeur est **l'effectif de cette valeur divisé par l'effectif total**.
**Remarque :** On exprime très souvent une fréquence en pourcentage.
Exemple : **3 élèves sur 25** ont obtenu **la note 7**. La fréquence de la note 7 est : $\frac{3}{25}$ = **0,12** = **12 %**

La **fréquence cumulée** d'une valeur est **la somme de tous les fréquences jusqu'à la fréquence de cette valeur**.
Exemple : **60 % des élèves (12 + 24 + 20 + 4 = 60)** ont obtenu **une note inférieure ou égale à 10**.

## 2. Diagramme en bâtons




## 3. Moyennes

| Note | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Effectif** | 3 | 6 | 5 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 25 |
| **« Produit »** | 21 | 48 | 45 | 10 | 22 | 36 | 26 | 42 | **250** |

Pour calculer une **moyenne** :
① **on additionne toutes les valeurs**
② **on divise le résultat par le nombre de valeurs**

Exemple :

$$M = \frac{21+48+45+10+22+36+26+42}{25} = \frac{250}{25} = \mathbf{10}$$

## 4. Etendue

L'**étendue** d'une série statistique est **la différence entre les deux valeurs extrêmes** de la série.

Exemple : L'étendue de la série est **E** = 14 − 7 = **7**
Il y a **7** points d'écarts entre la note la plus élevée et la note la plus basse.

# 41 - STATISTIQUES : MEDIANE - QUARTILES - MOYENNE PONDEREE

**Premier type d'organisation**

## 1. Médiane

La **médiane** d'une série statistique est **la valeur qui partage** la série **en deux parties de même effectif**.
Il y a **autant** de **valeurs inférieures** que de **valeurs supérieures** à la **médiane**.

**Exemple 1 : nombre de notes impair**
On considère les notes obtenues à un devoir : 10 ; 15 ; 8 ; 13 ; 6 ; 7 ; 11

On range les notes dans l'ordre croissant : 6 ; 7 ; 8 ; $\boxed{10}$ ; 11 ; 13 ; 15 ;

On prend la valeur située au **milieu de la série** : **m** = **10**

**Exemple 2 : nombre de notes pair**
On considère les notes obtenues à un devoir : 7 ; 12 ; 8 ; 18 ; 6 ; 6 ; 14 ; 20
On range les notes dans l'ordre croissant : 6 ; 6 ; 7 ; **8 ; 12** ; 13 ; 18 ; 20
Quand on a un nombre pair de valeurs, on prend **n'importe quelle valeur entre les deux valeurs situées au milieu de la série**, donc n'importe quelle valeur entre 8 et 12, par exemple **m = 9**.

## 2. Quartiles

Les valeurs d'une série statistique étant rangées dans l'ordre croissant :

Les **quartiles d'une série statistique sont les valeurs qui séparent la série en quatre séries de même effectif (à une unité près).**
**Au moins un quart des valeurs de la série sont inférieures ou égales au premier quartile $Q_1$.**
**Au moins les trois quarts des valeurs de la série sont inférieures ou égales au 3ème quartile $Q_3$.**

**Exemple 1 : nombre de notes divisible par 4**
On considère les notes obtenues à un devoir : 9 ; 12 ; 8 ; 18 ; 4 ; 7 ; 14 ; 20

On range les notes dans l'ordre croissant : 4 ; $\boxed{7}$ | 8 ; 9 | 12 ; $\boxed{14}$ | 18 ; 20

| Calcul de la position du premier quartile $Q_1$ : | Calcul de la position du troisième quartile $Q_3$ : |
|---|---|
| $8 \times \frac{1}{4} = \mathbf{2}$ (on prend 8 car il y a 8 notes)<br>Le premier quartile est le nombre situé en **2ème** position, c'est le nombre **7**. | $8 \times \frac{3}{4} = \mathbf{6}$ (on prend 8 car il y a 8 notes)<br>Le troisième quartile est le nombre situé en **6ème** position, c'est le nombre **14**. |

**Remarque :** le calcul du second quartile ne présente pas d'intérêt, puisque la médiane permet de partager la série en deux parties de même effectif.

**Exemple 2 : nombre de notes non divisible par 4**
On considère les notes obtenues à un devoir : 7 ; 14 ; 10 ; 15 ; 5 ; 8 ; 19

On range les notes dans l'ordre croissant : 5 ; $\boxed{7}$ | 8 ; 10 | 14 ; $\boxed{15}$ | 19

| Calcul de la position du premier quartile $Q_1$ : | Calcul de la position du troisième quartile $Q_3$ : |
|---|---|
| $7 \times \frac{1}{4} = 1,75$ (on prend 7 car il y a 7 notes)<br>**Lorsque le calcul de la position du quartile donne un nombre à virgule, on prend le nombre entier suivant,** donc ce sera le nombre en 2ème position, c'est le nombre **7**. | $7 \times \frac{3}{4} = 5,25$ (on prend 7 car il y a 7 notes)<br>**Lorsque le calcul de la position du quartile donne un nombre à virgule, on prend le nombre entier suivant,** donc ce sera le nombre en 6ème position, c'est le nombre **15**. |

## 3. Moyenne pondérée

Une **moyenne pondérée** est une moyenne **calculée avec des coefficients**, c'est le cas par exemple des notes obtenues lors d'un examen, ou pour calculer votre moyenne en mathématiques.

Exemple : Notes obtenues DS : 12 (coefficient 4) IE : 15 (coefficient 1) Brevet blanc : 10 (coefficient 8)

$$\text{Moyenne : } \frac{12\times 4 + 15\times 1 + 10\times 8}{4 + 1 + 8} = \frac{48 + 15 + 80}{13} = \frac{143}{13} = \mathbf{11}$$

# 42 - STATISTIQUES - VALEURS GROUPEES EN CLASSES

**Deuxième type d'organisation**
**Valeurs groupées en classes**

Considérons les 25 notes d'un contrôle de mathématiques d'une classe de 3$^{\text{ème}}$ :

8 – 9 – 14 – 8 – 12 – 9 – 7 – 12 – 9 – 13 – 9 – 11 – 12 – 7 – 9 – 8 – 11 – 8 – 8 – 14 – 10 – 14 – 8 – 13 – 7

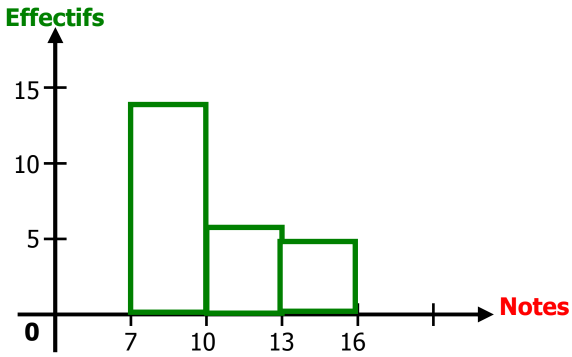
On regroupe les 25 notes en 3 classes de même largeur : **[ 7 ; 10 [ ; [ 10 ; 13 [ ; [ 13 ; 16 [**

C'est comme pour les notations de segments, 13 appartient à [13 ; 16[ et 16 n'en fait pas partie.

## 1. Effectifs

| Classe de notes | [ 7 ; 10 [ | [ 10 ; 13 [ | [ 13 ; 16 [ | Total |
|---|---|---|---|---|
| **Effectif** | 14 | 6 | 5 | 25 |

## 2. Histogramme




**Remarque :** Dans un histogramme , les aires des rectangles doivent être **proportionnelles** aux effectifs. Il est donc pratique d'avoir **des classes de même largeur** pour que les hauteurs des rectangles soient proportionnelles aux effectifs.

## 3. Moyenne

Lorsque la série se présente sous forme de classes, on admet que toutes les valeurs se regroupent **au centre de la classe**.

Chaque valeur est affectée de l'effectif de la classe. Pour calculer une **moyenne** :
① **on multiplie chaque valeur par l'effectif de la classe correspondante**
② **on additionne tous les produits**
③ **on divise le résultat par la somme des effectifs**

Exemple :

| Classe de notes | [ 7 ; 10 [ | [ 10 ; 13 [ | [ 13 ; 16 [ | |
|---|---|---|---|---|
| **Centre de la classe** | 8,5 | 11,5 | 14,5 | **Total** |
| **Effectif** | 14 | 6 | 5 | 25 |
| **« Produit »** | 119 | 69 | 72,5 | 260,5 |

$$\mathbf{M} = \frac{119 + 69 + 72{,}5}{25} = \frac{260{,}5}{25} = \mathbf{10{,}42}$$

**Remarque :** Les deux moyennes sont proches (1$^{\text{er}}$ et 2$^{\text{ème}}$ type d'organisation), mais pas égales. (**10** ≠ **10,42**)

C'est la **première moyenne qui est exacte**, alors que **la seconde n'est qu'une approximation**.

# 43 - PROBABILITES

## 1. Vocabulaire

**Définitions** Un phénomène dont **on ne peut pas prévoir de façon certaine le résultat** s'appelle une **expérience aléatoire**.
Chacun des **résultats possibles** est une **issue**.

**La pièce de monnaie**

**On lance une pièce de monnaie** équilibrée et on regarde sur quelle face elle tombe.

Cette expérience admet **2 issues : pile** et **face**.

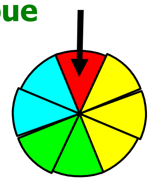
**Le dé à 6 faces**

**On lance un dé à 6 faces équilibré** et on regarde le nombre de points inscrits sur sa face supérieure.

Cette expérience admet **6 issues** : **1, 2, 3, 4, 5** et **6**

**La roue de loterie**

**On fait tourner une roue de loterie** équilibrée et on regarde la couleur désignée par la flèche à l'arrêt.



Cette expérience admet **4 issues** : **bleu, vert, jaune** et **rouge**

## 2. Probabilité d'un évènement

**Définition** La **probabilité** d'**un évènement A** représente **les chances que l'évènement se réalise** lors d'une expérience aléatoire. Cette **probabilité** se note **p(A)**.

**La pièce de monnaie**

Si on lançait la pièce de monnaie un très grand nombre de fois, on obtiendrait **face** environ **une fois sur deux** donc :

$$p(F) = \frac{1}{2}$$

**Le dé à 6 faces**

Si on lançait le dé un très grand nombre de fois, on **obtiendrait un nombre pair (2, 4 ou 6)** environ **trois fois sur six** donc :

$$p(A) = \frac{3}{6}$$

**La roue de loterie**

Si on faisait tourner la roue un très grand nombre de fois, on obtiendrait **la couleur rouge** environ **une fois sur huit** donc :

$$p(R) = \frac{1}{8}$$

**Propriétés** **Une probabilité** est **un nombre compris entre 0 et 1**.

**Définition** Lorsque **tous les évènements élémentaires** ont **la même probabilité d'être réalisés**, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

**Propriété** **Dans une situation d'équiprobabilité**, la **probabilité d'un évènement** est égale à :

$$\frac{\text{nombre de résultats favorables à l'évènement}}{\text{nombre de résultats possibles}}$$

**Exemple :** Dans le lancer d'un dé, quelle est la probabilité de **l'événement A** « **obtenir un nombre multiple de 3** » ?

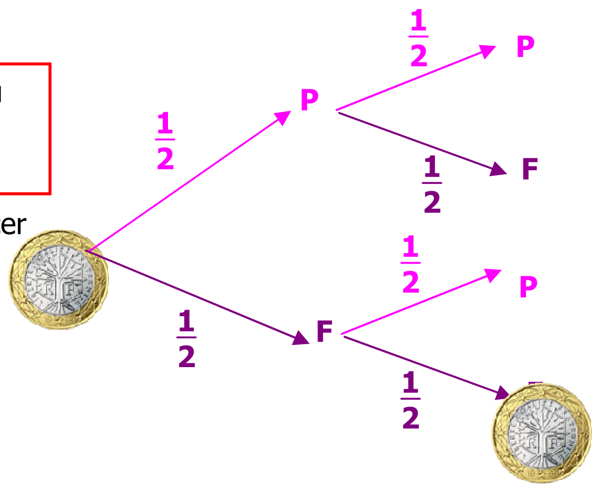
Il s'agit d'**une situation d'équiprobabilité**.
Il y a **6 résultats possibles** : « obtenir **1** ; **2** ; **3** ; **4** ; **5** ou **6** ».
Il y a **2 résultats favorables à l'évènement A** : « obtenir **3** ou **6** ».

donc $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

## 3. Expériences à deux épreuves

**Propriété** Dans un arbre de probabilités, la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égale au **produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin**.

**Exemple :** Avec une pièce de monnaie, on réalise un 1$^{er}$ lancer puis un 2$^{ème}$ lancer.
Quelle est **la probabilité** d'obtenir deux fois « **Face** » ?
On obtient l'arbre des probabilités ci-contre :




Donc $p(F ; F) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ soit **25%**.

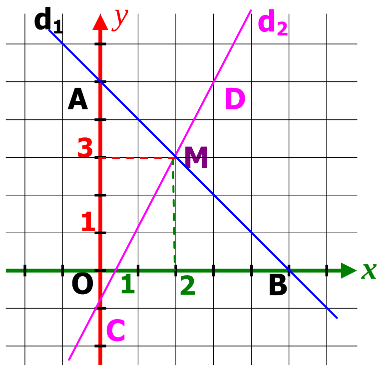
# 44 - RESOLUTION GRAPHIQUE D'UN SYSTEME DE 2 EQUATIONS A 2 INCONNUES

Cette fiche de cours correspond à l'activité qui a été faite dans la salle informatique : les droites ont été construites avec le grapheur gratuit Orge.

**Situation N°1** :

On veut **résoudre graphiquement** le système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

**Résoudre le système revient donc à déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites $d_1$** d'équation $y = -x+5$ et $d_2$ d'équation $y = 2x-1$.




**Méthode :**

① On trace la droite $d_1$ d'équation $y = -x+5$.
Elle passe par les points **A (0 ; 5)** et **B (5 ; 0)**.

② On trace la droite $d_2$ d'équation $y = 2x-1$.
Elle passe par les points **C (0 ; -1)** et **D (3 ; 5)**.

③ On lit les coordonnées du point d'intersection **M** des droites $d_1$ et $d_2$ : **M (2 ; 3)**

④ On donne la conclusion : La solution du système est **(2 ; 3)** et on vérifie .

**Explication détaillée :**

① On trace la droite $d_1$ d'équation $y = -x+5$.

| $x$ | 0 | 5 |
|---|---|---|
| $y$ | 5 | 0 |

On choisit deux valeurs de $x$ comme on veut.
La droite $d_1$ passe par les points **A (0 ; 5)** et **B (5 ; 0)**.

② On trace la droite $d_2$ d'équation $y = 2x-1$

| $x$ | 0 | 3 |
|---|---|---|
| $y$ | -1 | 5 |

On choisit deux valeurs de $x$ comme on veut.
La droite $d_2$ passe par les points **C (0 ; -1)** et **D (3 ; 5)**.

③ On lit les coordonnées du point d'intersection **M** des droites $d_1$ et $d_2$ : **M (2 ; 3)**

④ On donne la conclusion : La solution du système est **(2 ; 3)** et on vérifie.

**Situation N°2** :

On veut **résoudre graphiquement** le système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} x + y = 4 \\ -2x + y = 7 \end{cases}$

On se ramène à la méthode de l'exemple précédent en écrivant : $\begin{cases} y = 4 - x \\ y = 7 + 2x \end{cases}$

La solution du système est **(-1 ; 5)**.